Le Tenneur? See Pelisson, Histoire de l'Acad. Française ed. Olivet 1730 v. 1, p. 182

f 18

Le Tenneur; not J. A. Le Tenneur

Traite

AQUILA NON CAPTAT MUSCAS

STILLMAN DRAKE

RB106,197

Library
of the
University of Toronto

9363

Digitized by the Internet Archive
in 2024 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/traitdesquantite00lete

TRAITE' DES QVANTITEZ INCOMENSVRABLES:

OV SONT DECIDEES PLVSIEVRS belles Queſtions des Nombres Rationaus & Irrationaus.

LES ERREVRS DE STEVIN refutées.

ET LE DIZIEME LIVRE D'EVCLIDE illuſtré de nouueles demonſtrations plus faciles & plus ſuccinctes que les ordinaires, & reduit à 62. Propoſitions.

AVEC VN DISCOVRS DE LA MANIERE d'expliquer les ſciences en François, dedié à Meſſieurs de L'ACADEMIE FRANCOISE.

I. N. T. Q. L.

A PARIS
De l'Imprimerie de I. DEDIN, ruë des Noyers au petit Eſcu.
Et ſe vend
Chez LOVYS BOVLANGER, ruë S. Iaques à l'Image Saint Louys deuant Saint Yues.
Et chez AVGVSTIN COVRBE, Libraire & Imprimeur de Monſeigneur frere vnique du Roy, dans la petite Sale du Palais, à la Palme.

M. DC. XL.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

A PARIS

AVANT-PROPOS.

VOicy l'vne des plus ſubtiles matieres de toutes les Matematiques, & des plus dignes de la curioſité de ceus qui les cheriſſent. Il eſt vray qu'elle a eſté eſtimée ſi épineuſe & ſi obſcure, que le diſiéme liure d'Euclide qui la contient, eſt apelé par quelques vns l'horreur des Matematiciens, & la crois des bons eſprits. Mais c'eſt, à mon auis, parler trop indignement d'vne doctrine ſi ingenieuſe & ſi releuée : mon deſſein eſt de la purger de cete calomnie, & d'en doner aus curieus vne facile & parfaite intelligence. Ayant reconu que le grand nombre de propoſitions ; la longueur & la dificulté de pluſieurs demonſtrations, & quelques fois auſſi l'obſcurité des termes, les pouroient aiſement détourner de la lecture de ce 10e. liure : i'ay reduit à 62. propoſitions, les 117. qui le compoſent ordinairement ; ſubſtitué de nouueles demonſtrations, & meſmes quelques propoſitions à la place de celles qui eſtoient dificiles à comprendre ; & changé les termes qui m'ont ſemblé vn peu obſcurs, ou qui n'exprimoient pas bien ce qu'ils deuoient ſignifier. Il n'eſt pas beſoin de quoter icy ces changemens en particulier, ny ce que i'en ay retranché de ſuperflu & d'inutile, puis qu'on poura aſſez remarquer tout cela en conferant mon trauail auec celuy des autres.

Quelcun poura dire que ce n'eſt plus icy le 10e. d'Euclide ; & qu'apres auoir renuerſé ſon ordre, alteré ſa metode, changé des demonſtrations, des propoſitions & des termes, il n'eſt plus poſsible de le reconoitre. Mais come ie fais eſtat de ne diſputer iamais des mots, laiſſant à chacun le pouuoir d'impoſer des noms à ſa fantaiſie, lors qu'ils ne ſont pas encores receus : ie ne trouueray pas mauuais que l'on apele ces 62. propoſitions come on voudra. Pour moy i'ay continué de les nomer le 10e. d'Euclide, pource que c'eſt en efet la meſme choſe en ſubſtance, les meſmes concluſions, & la meſme doctrine, ſans qu'il y manque vne ſeule des ancienes propoſitiõs, pour le moins de celles qui ſont le cors du liure, ayant ſeulement mis en vne, celles qui ſe ſont trouuées n'auoir beſoin que d'vne meſme demonſtration, & changé en Corolaires, celles qui ſont plutôt conſequences des propoſitions precedentes, que Teoremes ſeparez : de ſorte que ie n'ay fait autre choſe que de le rendre plus ſuccinct & plus facile ; ce qui eſtoit entierement neceſſaire, apres tant de plaintes que l'on a faites de ſa longueur & de ſon obſcurité. Ie ne puis aſſez m'étoner que tant de grans perſonages, qui ont trauaillé ſur ce liure, & dont quelques vns en prometent vn particulier éclairciſſement, tels que ſont Montaureüs, Clauius, Dibuadius, Puteanus, Catalde, pour ne point parler des autres de moindre marque : ne ſe ſoient pas auiſez d'y faire la meſme choſe ; & qu'ils n'ayent rien changé en aucune propoſition, ny preſque en aucune demonſtration, s'eſtant contentez, ou de s'expliquer vn peu plus au long pour ſe mieus faire entendre, ou d'apliquer les nombres Irrationaus à chaque propoſition.

Peut eſtre qu'ils auront eſté retenus par ce vain reſpect

que l'on porte ordinairement aus anciens, de receuoir à yeus clos tout ce qu'ils nous ont laiſſé, ſans oſer iamais y rien coriger ny contredire ; come ſi nous eſtions aſſeurez qu'ils fuſſent paruenus au dernier degré de la ſageſſe & de la prudence humaine. Mais c'eſt impoſer vne dure ſeruitude à ſa raiſon, que de la captiuer de cete ſorte, en s'ôtant la faculté de iuger des choſes qui ſe preſentent. Il n'y a que la religion qui nous puiſſe obliger à cela ; & hors ce qui la regarde, notre raiſonement ſe doit exercer librement ſur tout, & n'épargner rien de ce qui le choque. Si ces grans genies de notre ſiecle, Viete, Campanelle, Galilée, ne ſe fuſſent genereuſement deliurez de cete tiranie, nous ſerions maintenant priuez des belles penſées, & des admirables inuentions, dont nous leur ſomes redeuables. Ie ne m'étendray pas dauantage ſur vn ſi ample ſuiet, & qui me porteroit trop loin : ce que ie viens de dire ſufira pour excuſer la liberté que ie me ſuis donée, de repaſſer la main ſur l'ouurage d'vn des plus grans Geometres de l'antiquité.

L'explication de ce liure eſt precedée d'vne Introduction, qui inſtruira de telle ſorte le Lecteur, de tout ce qui concerne cete matiere des Incomenſurables, qu'il n'aura beſoin, pour l'intelligence de tout ce Traité, que de la conoiſſance des ſis premiers liures des Elemens, & des regles ordinaires de l'Aritmetique pratique, auec vne legere teinture de la Filoſofie. Pour ce qui eſt à la fin de ce liure qui depend de l'11e. & du 12e. ce n'eſt qu'vne ſurabondance de doctrine, dont on ſe peut paſſer, & qui ne touche en aucune façon au 10e. liure. Cete Introduction eſt diuiſée en trois parties ; dont la premiere contient des queſtions & des definitions Aritmetiques, & quelques propoſitions choiſies parmy celles des 7. 8. & 9e. liures

d'Euclide. La 2e. traite de l'origine & de la nature des Incomenſurables, contre l'opinion de Steuin. Et la 3e. enſegne vne pratique des Nombres Irrationaus. Quelques vns trouueront peut eſtre mauuais, que i'ataque en cete Introduction, celuy que ie viens de nomer, qui eſt d'ailleurs de grande reputation en quelques endrois, & dont la doctrine ne peut estre reuoquée en doute. Ie rendray plus amplement raiſon de cecy au dernier chapitre de la 2e. partie, & diray ſeulement icy que demeurant d'acord de ſa reputation & de ſa doctrine, il ne s'enſuit pas qu'il ne puiſſe eſtre repris en beaucoup de choſes. La plus-part des grans perſonages n'ont pas laiſſé d'auoir des defaus, & les plus excelentes vertus morales ne ſont pas incompatibles auec quelques vices.

Ie ſay bien que le Traité des Incomenſurables n'eſt pas au gré de tous, come eſtant eſtimé vne choſe ſuperflue & inutile. Mais ſans m'aréter à faire vne longue Apologie en ſa faueur, ie me contenteray de dire que les ſauans Geometres en ont touſiours fait vn tres grand état, & l'ont tenu pour l'vne des plus belles parties de la Geometrie, ſans laquelle on ne la peut ſauoir que fort imparfaitement : & que c'eſt l'origine des nombres Algebraiques ou Irrationaus, ſans leſquels on ne peut reſoudre vne infinité de Problemes d'Algebre. Pour faire voir que ces meſmes nombres ſe peuuent auſſi rencontrer dans les calculs ordinaires, ie doneray à la fin de notre diziéme liure, quelques exemples de leur vſage, & de leur vtilité.

I'adjoute à tout cela vn Diſcours qui eſt vn peu éloigné de mon ſujet, lequel i'adreſſe à Meſſieurs de l'Academie Françoiſe, ſur ce que i'ay voulu publier ce Traité en

nostre langue, les inuitant à nous faire voir les sciences en François, come estant le plus riche ornement que l'on puisse doner à vne langue, & ce qui a rendu les ancienes plus recomandables.

Voila somairement le contenu de tout mon liure; que ie done au public par la seule consideration de le seruir. On croira aisément que ce n'est pas l'honeur que d'autres pouroient pretendre, d'auoir éclaircy vne matiere tenuë pour fort obscure, qui m'a obligé de le metre au iour, puisque i'ay mépriſé de luy faire porter mon nom. Ie me cache derriere mon tableau, pour en entendre les iugemens. S'il se trouue digne de l'aprobation des sauans, ils ne la refuseront pas à son Auteur, sans qu'il soit besoin pour cela de le conoitre. S'il ne la merite pas, il ne sera pas necessaire de sauoir quel il est. Mais l'aprobation, & la censure, des doctes, & des ignorans, me seront fort indiferentes pourueu que les curieus trouuent icy le soulagement & la facilité que i'ay voulu leur procurer, puisque c'est la seule fin que ie me suis proposée. En quoy si ie ne reüssis selon mon atente, ce me sera assez que mon trauail inuite ceus qui en seront capables, à faire quelque chose de mieus, non seulement sur cete matiere, mais encores sur toutes les pieces des anciens qui se trouueront auoir besoin de nouueles explications.

N'Ayant peu obſeruer l'ordre vulgaire des propoſitions d'Euclide tant Aritmetiques, que du 10e. *liure pour les raiſons mentionées en l'Auant-propos, i'ay mis en marge pour la ſatisfaction du Lecteur, la quote de chaque propoſition ſelon Clauius, qui eſt vn auteur aſſez eſtimé entre les Comentateurs des Elemens Geometriques. Et lors qu'il y aura vn zero, ce ſera pour deſigner que la propoſition n'eſt pas du nombre de celles d'Euclide.*

Les propoſitions qui ſeront citées par vn ſeul nombre & vn p. doiuent eſtre entenduës du Traité preſent, par exemple 12. *p. parmy les propoſitions Aritmetiques, ſignifie la* 12e. *de celles-là : mais dans le* 10e. *liure, c'eſt la* 12e. *du* 10. *liure.*

4. Lem. *veut dire quatriéme Lemme.*

A la fin du 10e. *liure, où i'ay adjouté quelques Teoremes de mon inuention, ces notes* 2. Lem. ad. *ſignifient ſegond Lemme adiouté. Et cette meſme ſillabe* ad. *ſignifie touſiours* adjouté, *ou* adjoutée.

Lors que les demonſtrations ſe ſont trouuées vn peu longues, ie les ay diuiſées en articles, qui ſeront citez en cette ſorte 4. art. *quatriéme article, ce qui doit eſtre entendu de la prop. preſente, lors qu'il n'y a rien autre choſe, mais* 3. art. 49. p. *veut dire, le* 3e. *article de la* 49e. *propoſition. Cete diſtinction ſoulagera fort le Lecteur dans vne longue demonſtration ; parce qu'eſtant dans le milieu, & ne ſe ſouuenant pas quelquefois de ce qui a eſté prouué auparauant, les citations d'articles le luy remetront auſſi tôt en memoire.*

Les autres notes s'expliqueront ainſi.

1. 6. *Premiere popoſition du ſiſiéme liure* : 15. 5. *quinz^e. cinq^e. & generalement toutes les fois qu'il y aura deus nombres, le premier ſignifiera la propoſition, & le ſegond, le liure des Elemens d'Euclide auquel elle appartient.*

Corol. *ou* Cor. *Corolaire*

Anot. *ou* An. *Anotation.*

11. p. Ar. *ou* Arit. *onz^e. propoſition Aritmetique des 24. demontrées en l'Introduction.*

Ax. *Axiome.*

5. def. *cinq^e. definition.*

Scol. 7. 2. *veut dire le Scolie de Clauius ſur la 7e. prop. du 2e. d'Euclide.*

2. deff. *ſegondes definitions.*

R2. *Racine quarée.* R3. *Racine quaré-quarée, ou Racine de Racine quarée.* R4. *Racine qq. quarée, &c.*

Les nombres qui ſont en marge vis à vis des titres des propoſitions, deſignent, come nous auons dit, la quote de Clauius, ce qui ſera auſsi pratiqué en des Corolaires, & quelquefois aus Anotations. Et lors qu'il y aura pluſieurs nombres, ce ſera pour ſignifier que pluſieurs propoſitions d'Euclide ſont reduites en vne ſeule, come il ſe verra en la 33e. vis à vis de laquele il y a ces deus nombres en marge, 37 : 74. diſtinguez par deus poins, pour montrer que ce n'eſt pas vne citation, au lieu que ceus des citations ne ſont ſeparez que d'vn point. Et ces deus nombres 37 : 74. témoignent que notre 33e. prop. comprend la 37. & la 74. de l'ancien ordre. Et ainſi des autres.

AVERTISSEMENT.

LEs premieres feuilles de ce Traité eſtoiẽt deja ſous la preſſe, lors que ie fus auerty par vn de mes amis, à qui i'en auois comuniqué le projet, que les opinions de Steuin eſtoient en partie refutées par Honorat Meynier dans ſon Aritmetique. Ce qui me dona auſsi tôt la curioſité de la voir, & me fit ſuſpendre mon impreſsion, pour ne pas tomber dans l'impertinence de pluſieurs auteurs de ce tems, qui n'ont point de honte de publier de nouueau, ce que d'autres ont écrit deuant eus. Mais ayant conſideré ſon langage, & ſon procedé; meſmes que ſes refutations meriteroient bien ſouuent d'eſtre refutées: ie n'ay pas creu que ſon liure me deut obliger à rien retrancher du mien, encores que i'auoüe qu'il y ait quelquefois des raiſons ſemblables aus mienes. Quant à ſon langage, ces beaus mots de lucubrations, progrediſſant, eſtayer ſon opinion, emmy les ſoldats, *& autres ſemblables; font voir qu'il n'y eſt pas plus heureus que la plus-part de ceus de ſon pays, à qui il eſt fort rare de bien parler autre langue que le jargon de leurs nourices: & ces autres*, principe accidental & change royal, *au lieu de* principe negatif *& de* change reel, *montrent bien qu'il n'entendoit pas touſiours ce qu'il diſoit. Pour ſon procedé contre Steuin, les argumens qu'il opoſe aus ſiens en la page 3. pour en découurir la nullité, leſquels pourtant ne leur ſont pas ſemblables; ce qu'il dit là meſme, de la matiere & de la forme, & en ſuite, de l'eſpece & des indiuidus, le font paſſer pour vn tres mauuais Filoſofe. Mais ce n'eſt pas mon deſſein de le refuter; ce ſeroit faire trop d'honeur à des ecriuains de ſa ſorte*

que

de s'arêter en aucune façon à ce qu'ils ont dit. Auſſi n'en ay-ie parlé qu'afin que le Lecteur ne s'étone pas ſi i'entreprens vne choſe que ce bel auteur promet dans ſon liure, mais dont il s'aquite aſſez mal.

FAVTES NOVVELEMENT découuertes outre celles qui ſont à la fin du liure.

PAg. 15. lig. 14. effacez ces mots *vne ou.* Là meſme, lig. 29. *outre* lif. *entre.* P. 21. lig. 30. *Ainſi* lif. *Auſſi.* P. 55. lig. 33. AB, lif. BD. P. 58. l. 24 metez en marge cete citation, 17. 6. P. 69. l. 8. en marge, 10. b, *lif.* 10. 6. P. 110. l. 1. *meſurées* lif. *meſurez.* P. 114. l. 18. *nomé* lif. *nomée.* P. 126. en marge, 17. *p. Ar.* lif. 18. *p. Ar.* P. 137. faites encores la meſme corection en marge. P. 142. en marge, 12. p. *lif.* 8. p. P. 156. en marge, 9. *def.* lif. 8. *lem.* P. 162. la derniere citation de la marge doit repondre à la 20. lig. P. 163. l. 1. metez en marge cete citation, 19. p. La meſme. l. 23. NB, lif. NP. P. 164. l. 25. *ſeroient.* lif. *ſeront.* P. 165. l. 10. *irationele.* lif. *rationele.* P. 166. en marge, 13. p. *lif.* 13. 6. P. 169. l. 22. en marge, 24. *p. Ar.* lif. *Corol.* 24. *p. Ar.* P. 172. en marge, *Cor.* 12. *lem.* lif. *Cor.* 11. *Lem.* P. 175. l. 20. en marge *An.* 18. *p.* lif. *An* 17. *p.* P. 177. l. 5. au lieu de ℔ 27 $\frac{1}{2}$. *lif.* ℔ 12 $\frac{1}{2}$. La meſme l. 26. *comenſurable.* lif. *incomenſurable.* P. 178. lig. der. ℔ 512. *lif.* ℔ 128. P. 197. en marge. *Scol.* lif. *Scol.* 7. 2. P. 199. lig. 20. *celles-cy.* lif. *celle-cy.* P. 208. l. 3. *nombre quaré.* lif. *nombre non quaré.* P. 210. en marge, effacés cete citation, *Corol.* 22. 6. P. 222. l. 2. en marge, 10. p. *lif.* 10. 6. P. 233. l. 31. *à aucune.* lif. *n'a aucune.* P. 246. l. 6. HB, *lif.* HK. P. 254. lig. 14. *Que* 2. lif. *Que* 4. P. 255. l. 2. *Le nombre* 4. lif. *Le nombre* 16. P. 265. l. 1. *vne ſegonde*, lif. *vn ſegond.* P. 267. l. 1. en marge, 36. 7. *lif.* 36. 3. Là meſme l. 6. metez en marge cete citation, 2. 6.

Extraict du Priuilege du Roy.

PAr grace & Priuilege du Roy, il eſt permis à Iſaac Dedin marchand Libraire & Imprimeur à Paris d'imprimer ou faire imprimer, vendre & debiter vn liure intitulé *Traité des Quantitez Incomenſurables, où ſont decidées pluſieurs queſtions des nombres, & le* 10e. *liure d'Euclide illuſtré de noueles demonſtrations &c.* pendant l'eſpace de cinq ans acomplis à comencer du iour qu'il aura eſté acheué d'Imprimer pour la premiere fois. Et defenſes ſont faites à toutes autres perſones d'Imprimer, faire Imprimer, vendre ny debiter ledit liure, ny partie d'iceluy, ſous pretexte d'augmentation, correction, changement de titre, ny pour quelque autre raiſon que ce puiſſe eſtre, ſans le conſentement dudit Dedin à pene de mille liures d'amende, de confiſcation d'exemplaires, & de tous deſpens, domages & intereſts, pendant ledit tems de cinq ans. Et en outre veut & entend ſa Maieſté que foy ſoit adioutée à l'extraict dudit Priuilege mis au comencement ou à la fin dudit liure, come à l'original. Le tout ainſi qu'il eſt plus à plein contenu audit Priuilege. Doné à Paris le 18. Aouſt 1640.

Par le Roy en ſon Conſeil.

Signé, LE BRVN.

Et Sellé du grand Seau de cire jaune.

Acheué d'imprimer le 27. Aouſt 1640.

INTRODVCTION
A LA DOCTRINE
DES INCOMENSVRABLES.

PREMIERE PARTIE
CONTENANT VN TRAITE' DES
Nombres, neceſſaire pour l'intelligence de cete matiere.

PREPARATION AV TRAITE' DES NOMBRES.

LA conoiſſance des Nombres ou quantitez comenſurables, eſt telement neceſſaire pour aquerir celle des incomenſurables, qu'Euclide ayant à traiter de ces dernieres, a eſté contraint de meſler l'Aritmetique auec la Geometrie, & d'inſerer dans ſes Elemens, trois liures de nombres qui contienent leurs plus belles proprietez. Ie pourois bien y renuoyer le Lecteur, ou ſupoſer qu'il en fut inſtruit, ſans en faire icy aucune mention. Mais voulant le ſoulager en tout ce qui me ſera poſſible, & la doctrine de ces trois liures eſtant bien plus ample qu'il n'eſt beſoin pour cete matiere, i'en ay recueilly 24. propoſitions, qui auec leurs definitions & axiomes, ſont ſufiſantes pour l'intelligence de ce traité; ſans neanmoins me détourner de la metode ordinaire des Geometres, qui outre leurs principes, n'admetent rien que ce qui a eſté demontré auparauant, ayant retranché le ſuperflu, & non pas le neceſſaire. Ie ſay bien que c'eut eſté aſſez d'expli-

quer ſomairement les definitions, & ie ne faiſois pas état au comencement, de m'y étendre beaucoup : mais eſtant tombé depuis quelque tems ſur vn liure, qui n'eſt pas nouueau à la verité, mais lequel m'auoit eſté inconu iuſques alors, qui eſt l'Aritmetique de Simon Steuin, ou i'ay trouué pluſieurs opinions erronées touchant les nombres, & les incomenſurables : i'ay creu qu'il ne ſeroit pas hors de propos de les refuter, afin de deſabuſer ceus qui pour quelque aparence de probabilité, pouroient les auoir receuës; & de preuenir les eſprits, qui n'en eſtans pas encores infectez, s'y laiſſeroient peut eſtre aiſément emporter, ſur la reputation d'vn home, qui a eſté tenu pour l'Archimede des Pays bas; quoy qu'il n'y ait rien, ce me ſemble, dans ſes écrits, qui merite vne ſi grande aprobation, qu'eſt celle qu'il a rencontrée; & meſmes qu'il done aſſez ſouuent des témoignages d'vn eſprit fort confus, & qui ne poſſede pas bien les choſes dont il parle. C'eſt ce qui m'obligera de traiter icy quelques queſtions Aritmetiques, & d'eſtre vn peu plus long en cete Introduction, que ie ne m'eſtois propoſé. Mais come tout cela eſt pour l'inſtruction du Lecteur, ie ne penſe pas qu'il y trouue rien qui ne luy ſoit agreable.

QVESTION I.

Que c'eſt que Nombre.

LE Nombre eſt vne choſe ſi conuë par la lumiere naturele, qu'il ne faut eſtre ny Filoſofe, ny Matematicien, pour le definir : & ie ne croy pas qu'il y ait perſone, qui ſache exprimer ſes penſées, qui eſtant interogé ſur la definition du Nombre, ne réponde auſſi tôt, que c'eſt vne multitude d'eſtres, ou de choſes qui ont quelque conuenance entre elles. Et quoy que peut eſtre, il ne parle pas d'abord de cete conuenance, il ſera neanmoins fort facile de luy faire auoüer, & luy-meſme auec vn peu de raiſonement reconoitra, qu'il eſt neceſſaire que les choſes nombrées ſoient homogenées, c'eſt à dire, qu'elles ayent quelque choſe de comun en quoy elles conuienent, & qu'il eſt impoſſible de nombrer les choſes heterogenées, ou entre leſqueles il n'y a aucune conuenance. Par exemple, on ne

poura pas metre en vn seul nombre, des cheuaus, des maisons, des fleurs, & d'autres choses ainsi diferentes, mais seulement celles qui sont de mesme espece, ou de mesme genre pour le moins. Ainsi l'on poura bien dire de plusieurs animaus, quoy que de diuerses especes, que leur nombre est 100. 200. &c. mais plus proprement les choses nombrées doiuent estre de mesme espece, come 30. homes, 50. chiens, & choses semblables, qui participent vne mesme nature.

Chacun de ces estres de mesme genre, ou de mesme espece, est apelé par les Aritmeticiens, vnité, come estant de soy-mesme, & selon son essence, vn, & simple, l'essence des choses ne se pouuant diuiser, pour le moins en parties Fisiques, quoy qu'il se puisse faire, que chacune des choses qui constituent le nombre, reçoiue diuision, lors qu'elles ont quantité continuë; mais cela est accidentel au nombre, & l'vnité ne s'y doit pas considerer entant que diuisible, mais seulement entant qu'elle est vne en essence, puisque le nombre ne laisse pas d'estre nombre, quoy que ses vnitez soient indiuisibles, & qu'on peut bien nombrer des homes, des Anges, & generalement toutes les choses qui ont vn estre propre, & vne seule subsistence, laquele ne reçoit ny augmentation, ny diminution, & qui par consequent ne se peuuent diuiser, pour le moins en parties semblables à leur total; car vn chien ne peut estre diuisé en parties qui conseruent l'essence du chien, encores que son cors le puisse estre come quantité continue; & les choses spirituеles ne peuuent estre diuisées qu'en parties Metafisiques, qui sont le genre & la diference.

On peut donc definir l'vnité, ce qui peut estre conceu come vne seule chose, soit qu'il puisse, ou ne puisse pas estre diuisé en plusieurs parties. Cette definition comprend generalement toutes les choses imaginables, & est à mon auis plus propre que celle d'Euclide, qui dit, que l'vnité est selon quoy chaque chose est apelée vne; ce qui semble estre plutôt la definition de la singularité ou particularité de chaque chose, que de l'vnité mesme, ou de la chose qui est vne, laquele neanmoins est ce qui doit estre considerè dans le nombre, puis que le nombre n'est pas reelement distingué des choses nombrées prises ensemble, n'en estant que l'agregé. Cela estant ainsi,

nous dirons auec la plus-part des Aritmeticiens, que le nombre eſt vne multitude compoſée d'vnitez, c'eſt à dire, d'eſtres qui ont quelque choſe de comun, & chacun deſquels peut eſtre conceu come vne ſeule choſe. Steuin meſmes demeure en partie d'acord de cete definition : mais outre qu'il veut faire paſſer l'vnité pour nombre, il la reſtreint au nombre Aritmetique entier ; & en done vne autre, qui eſt, à ſon auis, comune au nombre Aritmetique & au Geometrique ; choſe entierement ridicule, puiſque le Nombre Geometrique eſt vne eſpece de quantité, toute diferente de l'Aritmetique, come nous ferons voir en la 2e. partie. Mais ſans toucher maintenant à cete queſtion, & ſupoſant que le nombre Geometrique ſoit auſſi bien nombre que l'Aritmetique ; voyons ſi la definition generale donée par Steuin, eſt bone & legitime. Le nombre, dit-il, eſt ce qui exprime la quantité de chaque choſe ; ou, pour vſer de ces termes, cela par lequel s'explique la quantité de chaque choſe. Ce qui eſt proprement definir le terme numeral, & non pas le nombre, car c'eſt le propre du terme numeral, d'exprimer cete quantité ; mais le nombre eſt la choſe meſme où ſe retrouue cete quantité : par exemple, en ce nombre, 20. homes, le terme numeral (vint) exprime la quantité de ces homes, & les 20. homes ſont le nombre meſme, ou les choſes nombrées. D'ailleurs, cete definition conuient auſſi bien à la quantité continuë, c'eſt à dire, à la grandeur, qu'au nombre meſme. Car la ligne B, diuiſée en 6. parties égales, exprime auſſi bien les vnitez du nombre C, come le nombre C, compoſé de ſis vnitez, deſigne les parties de la ligne B. De plus, cete definition eſt encores defectueuſe, en ce que le nombre eſt quantité, non ſeulement par expreſſion, mais encores par efet, puis qu'il eſt compoſé de parties, qui eſt proprement en quoy conſiſte l'eſſence de la quantité. Et partant, la nature du nombre n'eſtant pas bien expliquée de cete ſorte, nous demeurerons dans la definition d'Euclide ſans y rien changer.

C 6

QVESTION II.

Quel eſt l'objet de l'Aritmetique.

CHACVN ſait, que l'Aritmetique eſt la ſcience des Nombres, & que par conſequent le Nombre eſt ſon propre objet; mais parce que le mot de Nombre ſe peut prendre diuerſement, il ſera fort à propos, pour éuiter dorénauant la confuſion, de determiner, deuant que de paſſer outre, en quelle ſignification il eſt ſon objet.

Il faut donc remarquer, qu'il y a trois principales ſignifications du Nombre, plus conſiderables que les autres.

Premierement, le Nombre ſe prend pour le terme numeral, ou pour les mots qui expriment le Nombre, tels que ſont ceuscy, trois, quatre, dis, quinze, &c. qui ſont plus proprement les noms des nombres, que les nombres meſmes.

Segondement, pour les choſes nombrées, qui eſt la vraye & plus naturele ſignification du Nombre; car il eſt certain, come i'ay déja dit, que le nombre n'eſt pas reelement diſtingué des choſes nombrées.

Et en troiſiéme lieu, le Nombre ſe prend pour le concept general du nombre, détache des choſes nombrées, come lors que nous conceuons generalement ces nombres, 3, 4, 6, &c. ſans nous figurer ny homes, ny cheuaus, ny aucune autre choſe de toutes celles, qui peuuent eſtre nombrées, ou faire nombre: mais ſeulement vne multitude vague, que nous ne voulons atacher à aucune ſorte d'eſtres particuliers, de meſme que quand nous formons vn concept de l'eſſence de quelque choſe, par exemple que nous conceuons l'home en general, ſans aréter notre penſée ſur Alexandre, ny ſur Ceſar, ny ſur aucun home particulier.

Or il eſt certain que l'Aritmetique n'eſt pas vne ſcience nominale, c'eſt à dire, qui ne s'aréte ſimplement qu'aus noms, mais qu'elle eſt reele, & conſidere la nature de ſon objet; & partant que ce n'eſt pas en la premiere ſignification qu'elle a pour objet le Nombre.

Auſſi peu conſidere t'elle le Nombre apliqué aus choſes;

car il eſt indiferent à l'Aritmeticien, que ſes concluſions s'entendent d'vne choſe plutôt que d'vne autre en particulier. Ainſi l'objet de l'Aritmetique n'eſt pas les choſes nombrées.

Mais le vray objet de l'Aritmetique ſera le Nombre ſelon la troiſiéme ſignification, c'eſt à dire, ſeparé & détaché des choſes, ou le concept general & vniuerſel du Nombre. Et quoy qu'en cete conſideration le Nombre ne ſoit, à proprement parler, qu'vn eſtre imaginaire, & qui ne ſubſiſte qu'en notre entendement, (car l'vnité ou ſingularité n'eſt pas détachée de la choſe qui eſt vne, & hors de cela ce n'eſt qu'vne imagination) l'Aritmetique ne laiſſe pas d'eſtre vne ſcience vraye, & reele, & d'auoir des demonſtrations claires & éuidentes, parce que ſon objet a vn tel fondement en la choſe meſme, que toutes ſes concluſions s'y peuuent apliquer quand on veut, ce qui eſt cauſe qu'elles ſont neceſſaires, & qu'elles ne dépendent point de la libre operation de noſtre eſprit, & partant peuuent y engendrer vne vraye ſcience.

QVESTION III.

Si le Nombre eſt quantité continuë.

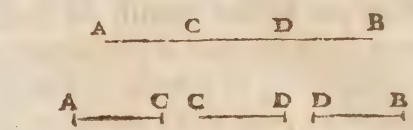
ON peut aiſément iuger, par la definition que nous auons donée du Nombre, s'il y a de l'aparence de dire auec Steuin, que le nombre eſt quantité continue, & non pas diſcrete; car puis que le nombre eſt vne multitude d'vnitez, c'eſt à dire, de diuers eſtres, qui ont quelque choſe de comun, il s'enſuit que ces eſtres ſont ſeparez & détachez les vns des autres, & qu'ainſi ils ne ſont pas quantité continue, autrement 20. homes, ou telle autre multitude d'vnitez ſeparées, ne ſeroient pas nombre, qui eſt ſans doute vne grande abſurdité, & qui repugne au ſens comun.

Mais on me dira, que l'opinion de Steuin eſt, que ces 20. vnitez ſont veritablement vn nombre, lequel, entant qu'vn n'eſt qu'vne quantité, qui n'eſt pas disjointe. Ie luy acorde, que 20. n'eſt qu'vne quantité, mais elle n'eſt pas neanmoins continue, puis que ſes parties ſont naturelement ſeparées; & ie ne

voy aucune conſequence de l'vnité à la continuité, car tous les homes d'vne vile ne font qu'vn peuple, & pourtant ne ſont pas atachez par le lien comun de continuité, de meſme que les parties d'vne ligne ou d'vne ſuperficie. Cela n'eſt que trop conu naturelement; & pour le montrer encores mieus, ce nombre d'homes ne peut eſtre diuiſé qu'en certains autres nombres, & en fin en vnitez, apres leſqueles la diuiſion ceſſe, au lieu que le continu peut eſtre diuiſé en vne infinité de façons, & en parties qui ne ſeront pas vnitez, eſtant comparées les vnes aus autres; le tout à cauſe de la disjonction des vnitez, qui ne peuuent ſoufrir la diuiſion, & de la conjonction des parties du continu, qui en ſont toujours capables.

Et ne ſert de rien d'aleguer auec Steuin, que c'eſt notre imagination qui diuiſe le nombre 60. en 60. vnitez, lequel n'eſt pourtant qu'vne entiere quantité, que nous pourions, auſſi bien diuiſer en 30. dualitez, & en 20. ternitez; & que de meſme ſorte on pouroit auſſi diuiſer vne ligne en 60. parties égales par imagination, ſans que pour cela elle ceſsât d'eſtre continuë: il ne ſert de rien, dis-ie, d'aleguer tout cela; car premierement, il eſt faus que ce ſoit notre ſeule imagination, qui diuiſe le nombre 60. en 60. vnitez, puiſque ſans que nous y penſions, ce nombre eſt de ſoy-meſme ainſi diuiſé. Pour les 30. dualitez, ou 20. ternitez, il eſt vray que c'eſt noſtre imagination qui les conçoit, & qu'en efet il n'eſt pas diuiſé en ſemblables parties, parce que la nature n'a point fait de dualitez, ny de ternitez, mais des vnitez ſeulement. Et ainſi il y a grande diference entre la diuiſion en vnitez, & la diuiſion en dualitez. Quant à la quantité continuë, il eſt certain que tant qu'elle demeure continuë, ce n'eſt que notre imagination qui la diuiſe en tant de parties que nous voulons: mais il y a encores bien de la diference entre cete diuiſion & celle du nombre; car le nombre ſe trouue reelement diuiſé en vnitez, au lieu que la quantité continuë n'eſt pas en efet diuiſée de cete ſorte plutôt que d'vne autre: & tant que ſes parties ne ſeront pas actuelement ſeparées, elle demeurera quantité continue, quoy que la diuiſant par imagination, elle puiſſe auſſi eſtre priſe pour diſcrete. Mais lors qu'elle ſera en efet diuiſée en parties égales, elle ne ſera plus quantité continuë, eſtant conſideree en ſon entier, come il ſe voit en la ligne

AB, laquelle nonobſtant que ie la conçoiue diuiſée en trois parties égales, eſt neanmoins continuë, & vne ſeule ligne : que ſi ie la diuiſe en efet en 3. parties égales, AC, CD, DB, elle n'eſt plus vne ſeule ligne, ny quantité continuë, mais trois lignes, qui par conſequent font vn nombre. La diſcontinuité n'ariue pas au nombre de la meſme ſorte, car elle luy eſt propre ſans aucune diuiſion actuele, ſes parties n'eſtant pas vnies.



Steuin dit en ſuite de cela, que le nombre eſt à la grandeur ce que l'humidité eſt à l'eau ; alegant pluſieurs choſes de l'humidité qui ſe pouroient dire auſſi de tous les autres accidens, puiſqu'ils ſuiuent toujours l'extenſion & la diuiſion de leur ſujet. Mais pour montrer que les meſmes choſes ſe retrouuent auſſi au nombre pour le regard de la grandeur, il auroit falu prouuer que le nombre ſe trouue toujours auec la grandeur : ce qui eſt faus, puiſque la grandeur n'eſt nombre que par imagination lors qu'elle n'eſt pas diuiſée actuelement, encores qu'elle ayt multitude de parties. Et lors qu'elle eſt diuiſée en pluſieurs parties, elle conſtitue vn nombre lequel n'eſt pas vne qualité en elle, come l'humidité en l'eau, puiſque materielement ce nombre n'eſt autre choſe que ces diuerſes parties ainſi ſeparées, & formelement eſt ſeulement vne denomination exterieure de notre entendement.

En fin il s'eſt imaginé mal à propos, qu'il y auoit de la contradiction entre ces deus propoſitions, Nombre eſt vne multitude compoſée d'vnitez ; Nombre eſt quantité diſcrete: parce, dit il, que ſi cete multitude eſt conjointe ou compoſée, elle n'eſt pas disjointe. A quoy ie répons, que ie ne ſay perſone qui apele le nombre, multitude conjointe, mais ſeulement compoſée, & qu'il y a des compoſez, dont les parties ne ſont pas conjointes ny vnies come celles d'vn continu. Car vn Parlement eſt compoſé de Conſeillers, qui ne ſont pas conioins de cete ſorte : & vne foreſt eſt compoſée d'arbres, qui ſont neanmoins ſeparez les vns des autres.

Pour les argumẽs, dont Steuin dit qu il pouroit bien impugner la diuiſiõ de la quantité, en continuë & diſcrete : i'aurois bien du regret qu'il ne les ait pas inſerez dãs ſon liure, ſi ie ne

iugeois

jugeois bien par ceus que ie viens de refuter, que ce ne peut estre rien qui vaille.

QVESTION IIII.

Si l'vnité est Nombre.

CETE question, qui n'est pas de si peu d'importance qu'on pouroit croire, semble estre assez decidée dans la premiere, & ie ne la traiterois pas, si quelques Aritmeticiens n'estoient de l'opinion afirmatiue. Steuin se done aussi bien de la pene pour la prouuer; mais encores que ses raisons, pour le moins quelques vnes, semblent auoir de l'aparence, ie ne laisseray pas (sans m'arrester à ce qu'il dit des conformitez qui se treuuent entre le point, & le zero, que j'auoüe estre le principe negatif du nombre, come la priuation l'est du composé naturel) de dire premierement, que

L'vnité considerée absolument, n'est pas nombre. La raison est, que le nombre consiste en multitude ou pluralité de parties, autrement il ne seroit pas quantité: or l'vnité n'est pas multitude de parties, n'estant qu'vne de ces parties, donc l'vnité n'est pas nombre. Et pour confirmation de cecy, on ne dira pas, qu'vn seul home soit vne multitude d'homes, ny generalement qu'vn indiuidu de quelque espece, soit vn agregé de ces indiuidus, puisqu'il y a de la repugnance entre l'vnité & la multitude.

Steuin dit que la partie est de mesme matiere que son entier; or l'vnité est partie de multitude d'vnitez; donc l'vnité est de mesme matiere que la multitude d'vnitez. Et parce que la matiere de multitude d'vnitez, est nombre, il s'ensuit que l'vnité est nombre. A quoy ie répons, qu'il est faus, que la matiere de multitude d'vnitez, soit toujours le nombre: car la matiere d'vne multitude, ce sont les choses qui la cõposent; & partãt la matiere de multitude d'vnitez, est l'vnité mesme, laquele il est encores question de sauoir, si c'est nombre, ou non. Ce qui a trompé Steuin en cet endroit, est, que beaucoup de nombres peuuent estre diuisez en d'autres nombres, par exemple 12. en 2. six fois, qui sont encores des nombres, & ainsi il semble que 2, qui est nombre, soit la matiere de 12. mais ce ne sera pas la derniere diuision ou resolution des parties de 12. puisque 2. qui est sa partie, peut estre encores diuisé en vnitez, de façon

que la vraye matiere de 12. sera l'vnité qui est matiere de 2. Il est pourtant certain que 2. est aussi matiere de 12. puisque 12. en est composé, & qu'ainsi il y a beaucoup de nombres qui sont matiere les vns des autres, mais non pas la derniere ; car c'est toujours l'vnité : & de plus, il n'est pas vray que toute matiere de nombre soit nombre, puis qu'il y en a beaucoup qui ne se peuuent resoudre exactement en d'autres nombres, tels que sont tous ceus que les Aritmeticiens apelent premiers, come 2. 3. 7. qui n'ont point d'autres parties aliquotes que l'vnité.

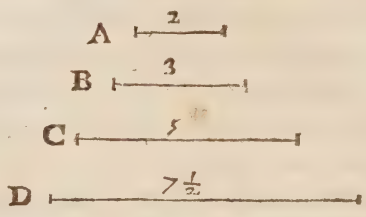
Steuin dit encores, que qui nie que l'vnité soit nombre, fait come qui nie qu'vn morceau de pain soit pain; voulant doner à entendre, que le nombre & l'vnité ne diferent que come le plus & le moins. Or ie luy aduouë que le nombre & l'vnité ne diferent que come le plus & le moins, le nombre estant plusieurs parties dont l'vnité n'est qu'vne, mais c'est cete pluralité qui constitue le nõbre en son estre de nombre. Pour sa comparaison, il est certain qu'elle n'est pas bone, car qui nie qu'vn morceau de pain soit pain, c'est à dire partie d'vn pain, il implique contradiction, parce que partie & morceau sont mesme chose ; mais qui nie que l'vnité soit nombre, ne nie pas que l'vnité soit partie de nombre : & come on peut nier, que le morceau de de pain, soit le pain entier dont il est partie, aussi peut on nier par mesme raison, que l'vnité qui est toujours partie de nombre, soit le nombre entier, de mesme que le pié, qui n'est que partie de la toise, n'est pas la toise entiere.

Le troisiéme argument de Steuin est tel. Si du nombre doné on ne sousträit aucun nombre, le nombre doné demeure : donc si de 3. on sousträit l'vnité, qui n'est pas nombre, il demeurera encores 3. N'est ce pas, à dire le vray, vn bel argument que celuy là, & bien digne d'vn home raisonable; car c'est come qui diroit, si de 20. pistoles ie n'en ôte aucune pistole, il demeure encores 20. pistoles. Or de mesme que de 20. pistoles on peut oter 5. écus, qui ne font pas vne pistole, & que neanmoins apres cela il ne reste pas 20. pistoles, ainsi de 3. en ayant ôté l'vnité, qui n'est pas vn nombre, il ne restera pas pourtant le mesme nombre, parce qu'encores qu'on n'en ait tiré aucun nombre il n'est pas vray de dire qu'on n'en ait rien tiré du tout, car ie ne veus pas faire passer l'vnité pour neant. L'antecedent de cet

argument n'eſt donc pas veritable, ſi du nombre doné on ne ſouſtrait aucun nombre, le nombre doné demeure, il faudroit dire, ſi du nombre doné on ne ſouſtrait rien: mais nous ne ſerions plus dans ſon hipoteſe, car il ſupoſe qu'on en ſouſtraye l'vnité.

Steuin, pour prouuer que l'vnité eſt nombre, dit encor, quoy qu'indirectement, (car c'eſt en faiſant autre choſe) que l'vnité eſt diuiſible, & alegue pluſieurs queſtions de Diofante, où il eſt parlé de diuiſer l'vnité, en ſuite de quoy elle doit eſtre tenuë pour nombre, puis qu'elle a des parties. Ie répons à cet argument, que quand le terme numeral s'entend des parties du continu, lequel ſe peut diuiſer à l'infiny, come enſegnent les Filoſofes, à lors il n'y a point de doute, que l'vnité eſt diuiſible, come partie de grandeur, & non pas come vnité numerale. Mais parce qu'à demeurer dans les termes du vray nombre, le nombre propre & naturel eſt la quantité diſcrete, c'eſt à dire la multitude d'vnitez: que la grandeur ou quantité continuë, ne l'eſt que par diuiſion actuele ou imaginaire; & que, pour les raiſons que i'ay dites en la premiere queſtion, l'vnité numerale eſt indiuiſible: l'Aritmetique ſpeculatiue, qui ne conſidere que les nombres, n'admet aucunement ſa diuiſion, autrement ſes demonſtrations ne ſe pouroient pas verifier de tous nombres. Car ſi ie dis, par exemple, qu'à trois nombres donez on peut toujours trouuer vn 4e proportionel, cete propoſition eſt fauſſe en nombres compoſez d'vnitez diſcretes & indiuiſibles de leur nature. Que les nombres donez ſoient 2. 3. 5. par leſquels nombres ſoient entendus des Anges, il eſt certain qu'il eſt impoſſible de leur trouuer vn quatriéme proportionel, parce que l'vnité, qui eſt icy vn Ange, eſt indiuiſible, & qu'il n'y a point de tiers ny de quart d'Ange. Cete propoſition ne pouroit donc eſtre vraye qu'en grandeur, ou quantité continuë, qui n'eſt pas de quoy il eſt queſtion en l'Aritmetique ſpeculatiue, laquelle conſidere ſeulement les nombres & non pas la grandeur, parce qu'elle n'eſt nombre que par repreſentation, c'eſt à dire, entant qu'eſtant diuiſée en parties égales, chacune repreſente la meſme choſe que l'vnité au nombre. Et parce que n'eſtant pas nombre, elle eſt indiferente à repreſenter toutes ſortes

de nombres, ſelon la diuiſion qu'elle reçoit : de là vient que ſes parties n'eſtant pas plutôt vnitez que dualitez, douzaines, centaines, &c. elles ſont toujours capables d'eſtre duiſées en tant de parties qu'on voudra, come eſtant toutes quantitez continuës, qui par conſequent ſe peuuent toujours diuiſer. Et ainſi les nombres propoſez eſtans repreſentez par les lignes A, B, C, on leur poura trouuer vn quatrieſme proportionel, ou plutot vne ligne quatriéme proportionele, laquelle ſera en nombres $7\frac{1}{2}$. c'eſt à dire 7. des meſmes parties, dont A en contient 2. & vne demie de plus, ou pour mieus dire, ſans ſe ſeruir de nombres rompus, la ligne D, contient 15. des meſmes parties, dont A, en contient 4. B, 6. C, 10. ou ſi on veut, les lignes A, B, C, D, ſeront 12. 18. 30. 45. & tels autres nombres qu'on voudra, en meſme proportion, come eſtans capables de toutes diuiſions. Il ne faut donc pas s'étoner ſi l'Aritmetique ſpeculatiue ne diuiſe pas l'vnité, puis que ce ſeroit traiter d'vne choſe qui eſt hors de ſon objet. Ie ſay bien que la ſuputatrice ou pratique, laquelle s'acomode aus afaires humaines, où il s'agit le plus ſouuent de la diuiſion du continu, eſt contrainte d'admetre les fractions, mais auſſi ne fait elle gueres d'operations, que ſes nombres ne ſoient apliquez aus parties de la grandeur ; come dans les calculs Aſtronomiques, les degrez, minutes, ſegondes, &c. ne ſont que des parties de lignes circulaires, & les ſinus, de lignes droites. Et en tous les contes iournaliers des monoyes, on ne fait autre choſe que diuiſer le continu, pour le moins par equiualence, come lors qu'on dit, que la piſtole vaut 10. francs, & qu'on done en échange 10. pieces d'argent, c'eſt en efet la meſme choſe que ſi on la diuiſoit en 10. parties égales actuelement ; & chacune de ces pieces d'argent eſt en valeur la meſme choſe que ſeroit chacune des 10. pieces d'or, en quoy elle ſeroit diuiſee. Si donc nous voyons en pluſieurs problemes d'Algebre, come chez Diofante & ailleurs, l'vnité diuiſée



en plusieurs parties, c'est que les termes numeraus ne se peuuent alors entendre que de la quantité continuë. Et ainsi l'autorité de Diofante & des autres Aritmeticiens ne fait rien contre nous; & Steuin s'est embaraſſé dans ſes imaginations, pour n'auoir pas ſeu faire ces diſtinctions.

Il adiouſte encores, que les diſtinctions de ceux qui diſent, que l'vnité n'eſt pas diuiſible, ne peut oprimer la nature du nombre. C'eſt ce que ie luy auoüe: auſſi cete propoſition ne détruit-elle pas ſa nature; mais pourtant toutes ſes raiſons ne ſont pas capables de me faire croire, que l'vnité ſoit nombre, ny que l'eſſence de chaque choſe puiſſe eſtre diuiſee en parties fiſiques ou quantitatiues.

Ie dis en ſegond lieu, que l'vnité eſtant comparée à d'autres nombres, & meſlée auec eus, peut eſtre priſe pour nombre, quoy qu'improprement. La raiſon eſt, qu'elle eſt partie conſtitutiue du nombre, & partant a proportion auec quelque nombre que ce ſoit, puis qu'elle les meſure tous: qu'elle repreſente toute ſorte de nombres figurez par vne impropre multiplication de ſoy-meſme, & qu'en vn mot elle a toutes les proprietez des nombres, excepté la pluralité des parties & la diuiſion, leſqueles choſes ne ſe conſiderent pas toujours dans les Teoremes numeraus: ce qui eſt cauſe qu'on peut démontrer pluſieurs propoſitions de l'vnité meſlée auec d'autres nombres, de meſme que de pluſieurs nombres comparez enſemble. Et pour cete raiſon nous l'apelerons quelquefois nombre dans des propoſitions numerales, quoy qu'elle ſoit plus proprement partie de nombre que nombre.

De tout ce que nous venons de dire, il eſt aiſé de conclure, qu'il y a quelque raport & reſſemblance entre le point de la quantité continüe, & l'vnité du nombre: mais que d'autre part il y a de tres grandes & ſignalees diferences. Ce qu'il y a de comun entre l'vn & l'autre, eſt, que tous deus ſont indiuiſibles, n'ont pas pluralité de parties, & par conſequent ne ſont point de quantité. Les diferences ſont, que l'vnité eſt partie du nombre, & qu'eſtant repetée elle le conſtituë, au lieu que le point n'eſt pas partie du continu, n'a point de proportion auec le continu, & qu'eſtant repetê tant de fois qu'on voudra, il ne ſauroit le compoſer. De

plus, le point n'eſt à proprement parler qu'vne choſe imaginaire conçeüe telle qu'elle eſt definie, mais qui en efet ne ſe trouue pas dans le continu, à cauſe des abſurditez qui s'enſuiuroient, ſi on admetoit des poins réels, come remarquent les Filoſofes naturels au traité de la quantité : l'vnité au contraire, eſt reele dans le nombre, puis qu'elle eſt ſa partie, & qu'elle le compoſe.

Ainſi on voit que nous ne ſomes pas de ceus, qui croyent que l'vnité ſoit au nombre la meſme choſe que le point à la grandeur; & que ce n'eſt pas contre nous que Steuin fait tant de piteuſes exclamations, pour raiſon de cete opinion. Ie ne ſay, à dire le vray, à qui s'adreſſent ſes doleances, ny contre qui il inuectiue ſi fort à ce ſujet, n'ayant iamais leu aucun auteur, ny conu perſone tant ſoit peu Geometre & Aritmeticien, qui fût de cet auis, ny qui s'imaginât rien de ſi extrauagant.

QVESTION V.

Que c'eſt que proportion & proportionalité pour les nombres.

LA proportion des nombres eſt l'habitude, comparaiſon, ou raport d'vn nombre à vn autre, ſelon ce qu'vn nombre eſt égal, multiple, partie, ou pluſieurs parties d'vn autre nombre : ou bien le contient vne ou pluſieurs fois, & de plus ſa partie, ou pluſieurs de ſes parties.

Ainſi l'habitude de 4. à 3. eſt la proportion de 4. à 3, & cete definition contient toutes les eſpeces qui s'en peuuent imaginer.

Car les nombres ſont egaus, ou inegaus : & de cete 1re diuiſion des nombres comparez enſemble, vient la 1re diuiſion de la proportion, en proportion d'egalité, & proportion d'inegalité.

La proportion d'egalité, eſt celle qu'il y a entre deus nombres egaus, come 4. & 4.

La proportion d'inegalité, eſt celle qui ſe trouue entre

deus nombres inegaus, come 5. & 2.

La proportion d'egalité ne se subdiuise point.

Celle d'inegalité est, ou de grande inegalité, ou de moindre inegalité.

La proportion de grande inegalité, est celle qu'il y a du plus grand nombre au moindre, come de 7. à 2. La proportion de moindre inegalité, est celle qu'il y a du moindre au plus grand, come de 2. à 7. Et ne faut pas croire, que cete diuision soit invtile, car il y a grande diference entre la proportion de 7. à 2. & celle de 2. à 7. puis que ce n'est pas le mesme de comparer le plus grand au moindre, que de comparer le moindre au plus grand.

Si le plus grand est comparé au moindre; ou le plus grand contiendra le moindre ~~vne ou~~ plusieurs fois exactement, & en sera multiple, come 48. de 6. lequel il contient 8. fois; ou le contiendra vne ou plusieurs fois, & de plus sa partie aliquote, come 36. à l'egard de 8. lequel il contient 4. fois, & 4. de plus qui est moitié de 8: ou bien le plus grand nombre contiendra le moindre vne ou plusieurs fois, & de plus plusieurs de ses parties ne faisans pas vne partie aliquote, come 46. à l'egard de 8. lequel il contient 5. fois, & 6. de plus, lequel nombre de 6. n'est pas partie aliquote, mais plusieurs parties aliquotes de 8, sauoir $\frac{6}{8}$. ou $\frac{3}{4}$.

Que si le moindre nombre est comparé au plus grand, il faut que le moindre soit partie ou plusieurs parties du plus grand: partie, come 3. à l'egard de 15. parce que 3. est la 5e partie de 15: plusieurs parties, come 2. comparé à 9. sauoir $\frac{2}{9}$.

Voila toutes les sortes de proportions qu'il est possible de conceuoir ~~entre~~ entre deus nombres, quels qu'ils soient: mais pour les grandeurs, il n'en est pas de mesmes, car il s'y peut encores rencontrer d'autres proportions, que toutes celles-cy, lesqueles pour cete heure ne font rien à notre suiet, non plus que les diuerses diuisions de proportions numerales, que le Lecteur poura voir ailleurs.

Or de mesme que les nombres se comparent les vns aus autres, & que cete comparaison ou raport s'apele proportion, les proportions se comparent aussi entre elles: & cete com-

paraiſon eſt apelée proportionalité, & quelquefois auſſi proportion. Et lors que les proportions ſont egales, les nombres entre leſquels ſe trouue egalité de proportions, ſont proportionaus, ou en meſme proportion, ſelon qu'il eſt expliqué en la 20. defin. du 7e. liure, qui eſt la 16e. des notres, laquele eſt telle.

Les nombres ſont proportionaus lors que le premier eſt autant multiple du ſegond, que le troiſiéme du quatriéme: ou que le premier eſt meſme partie, ou meſmes parties du ſegond, que le troiſiéme du quatriéme. Ou bien lors que le 1er contient autant de fois le ſegond, & de plus la meſme partie, ou les meſmes parties du 2e, que le 3e. contient le 4e. & de plus la partie ou les parties du 4e.

Sur quoy il faût remarquer, que puis que la proportionalité eſt vne comparaiſon de proportions, & que la proportion eſt entre deus nombres; il s'enſuit neceſſairement, que la proportionalité ne ſe peut trouuer en moins de 4. nombres, ou que ce doit eſtre pour le moins en 3. dont l'vn ſera pris 2. fois; afin que les 3. en repreſentent 4: car lors qu'il n'y aura que deus termes, il n'y aura qu'vne proportion, & partant point de comparaiſon de proportions; non plus que s'il y en a 3. & que l'on ne conſidere pas les proportions qu'il y-a de l'vn des 3. à chacun des 2. autres. Et ainſi pour faire proportionalité, il faut qu'il y ait touiours 4. termes, ou actuelement, ou par puiſſance; actuelement, quand il y-en a 4. diferens, come ſont 4. 6. 2. 3. comparant la proportion de 4. à 6. à celle de 2. à 3: par puiſſance, lors que n'y en ayant que 3. le terme du milieu eſt pris deus fois, come icy 16. 8. 4. comparant la proportion de 16. à 8. à celle de 8. à 4. Et c'eſt pour cete raiſon, qu'il eſt parlé en cete definition de 4. termes, encores que quelque fois il n'y en ait que 3.

Or il y-a trois ſortes de proportionalitez receuës preſque de tous les Matematiciens; Aritmetique, Geometrique, Armonique.

La proportion ou proportionalité Aritmetique ſe trouue entre des nombres dont les diferences ſont egales, come ſont ceus cy, 2. 3. 5. 6, car il y-a meſme diference de 2. à 3. que de 5. à 6. ſauoir l'vnité. Elle eſt de deus ſortes, continuë, & diſcrete.

diſcrete. La continuë eſt celle où il n'y a aucune interruption, chaque terme du milieu eſtant pris deus fois, come icy 8. 6. 4. 2. y ayant meſme diference entre 8. & 6. qu'entre 6. & 4. & la meſme entre 6. & 4. qu'entre 4. & 2. où l'on voit que les termes du milieu 6. & 4. ſont comparez aus antecedens & aus conſequens. La diſcrete, eſt celle où il y a de l'interruption, chaque nombre n'eſtant pas comparé auec le precedent, come en celle-cy, 4. 3. 7. 6. où les deus premiers ont bien la meſme diference que les deus derniers, mais le ſegond & le troiſiéme n'ont pas meſme diference, que le 1er & le 2e ny que le 3e & le 4e.

Proportionalité Geometrique eſt celle qui eſt entre des nombres proportionaus, ou qui ont meſme proportion, de la façon que nous venons de l'expliquer, c'eſt à dire, lors que le premier eſt autant multiple du ſegond, &c. ſuiuant les diuerſes ſortes de proportions que nous auons remarquées: car voila ce que c'eſt que d'eſtre en meſme proportion pour les nombres: mais pour les grandeurs, nous auons déja dit, que cete definition n'y quadroit pas touiours, ſe pouuant faire que des grandeurs ſeront proportioneles, qui n'auront aucune de ces habitudes les vnes aus autres: car toutes les proportions mentionées en la definition precedente, ſont rationeles ou explicables par nombres, au lieu que bien ſouuent les proportions des grandeurs, ne ſe peuuent exprimer par des nombres, & pour cete raiſon ſont apelées irrationeles. Auſſi Euclide definit autrement les grandeurs proportioneles en la 6. defin. du 5. liu. laquele peut bien s'apliquer aus nombres, quoy que celle-cy des nombres proportionaus, ne puiſſe pas s'apliquer generalement à toutes ſortes de grandeurs, mais ſeulement à celles qui ſont en meſme proportion que des nombres. Et pour doner à entendre cete definition, ce ſera aſſez d'aporter icy des exemples de toutes les ſortes de proportions que peuuent auoir des nombres proportionaus, ſans qu'il ſoit beſoin de s'y étendre dauantage.

Ces quatre nombres 8. 4 12. 6. ſont proportionaus en proportion multiple, car le premier contient deus fois le 2e, de meſme que le 3. contient deus fois le 4e. Et ſi on renuerſe leur ordre, en faiſant les antecedens conſequens, & les

conſequens antecedens, en cete ſorte 4. 8. 6. 12; le nombre 4. ſera meſme partie de 8. que 6. de 12. ce qui s'apele proportion ſubmultiple.

Les quatre ſuiuans 5. 6. 10. 12. ſon proportionaus de la 3e eſpece, car 5. eſt les meſmes parties de 6. que 10. de 12. Et ſi on renuerſe leur ordre en cete ſorte, 6. 5. 12. 10, le premier contiendra le ſegond vne fois & ſa 5e partie, de meſme que le 3e contient le 4e vne fois, & ſa 5e partie.

En fin ces quatre autres, 18. 5. 36. 10. ſont proportionaus de la derniere eſpece; car 18. contient 5. trois fois & $\frac{3}{5}$. de 5: de meſme que 36. contient 10. trois fois & $\frac{3}{5}$ de 10.

Cete proportionalité, de meſme que l'Aritmetique, ſe diuiſe en continue & diſcrete, eu égard à ce que les termes moyens ſeruent vne ou deus fois. Celle-cy eſt continuë, 3. 12. 48. 192. parce qu'il y a meſme proportion de 3. à 12. que 12. à 48. & de 12. 48. que de 48. à 192. Cete autre eſt diſcrete, 8. 7. 16. 14. car il y a bien meſme proportion de 8. à 7. que de 16. à 14. mais non pas la meſme de 8. à 7. que 7. à 16.

La proportionalité Armonique, eſt celle qui ſe trouue entre trois nombres, dont le plus grand eſt en meſme proportion auec le moindre, que la diference des deus plus grans, auec la diference des deus moindres. Tels ſont 6. 4. 3. dont le plus grand 6. contient 3. deus fois, de meſme que 2. diference des deus plus grans 6. & 4. contient l'vnité deus fois, qui eſt la diference des deus moindres 4. & 3. Tels ſont auſſi pour la meſme raiſon 12. 6. 4. & vne infinité d'autres.

Nous auons defini la proportionalité en general, vne comparaiſon de proportions, afin d'auoir quelque choſe de comun à ces trois proportionalitez, car il eſt certain qu'en toutes trois on compare les proportions des termes, mais en toutes trois elles ne ſont pas egales, puis qu'en la proportionalité Aritmetique, il n'y a egalité que de diferences; en l'Armonique ce ne ſont pas les nombres propoſez qui ſont proportionaus, mais ſeulement deus nombres à deus diferences: de façon qu'il n'y a que la Geometrique, dont les termes ſoient en meſme proportion, laquele pour cete raiſon eſt definie par Euclide en la 4. defin. du 5. liu. ſimilitude de proportions.

QVESTION VI.

Sauoir ſi les nombres proportionaus ſont proportion Geometrique, ſelon la doctrine enſegnée en la derniere queſtion.

ENCORES que ces trois ſortes de proportionalitez, ſoient reçeuës generalement de tous les Autheurs, de la façon que nous les venons d'expliquer: neanmoins Steuin, qui croit faire l'habile home, en diſant quelque choſe d'extraordinaire, n'en veut pas demeurer d'acord, & dit que les nombres qui gardent meſmes diferences, ne ſont pas proportion Aritmetique, ny ceus qui ſont proportionaus, proportionalité Geometrique, ny les 3. nombres, dont les extremes ſont proportionaus aus diferences des deus plus grans & des deus moindres, proportion Armonique; parce, dit-il, que toute proportionalité obtient vn nom conforme à la matiere de ſes termes: de ſorte que les nombres proportionaus feront la proportion Aritmetique, les grandeurs proportioneles, la Geometrique, & les ſons proportionaus, l'Armonique. Or puis que c'eſt le ſens de Steuin, ie ne doute point que s'il eut doné le premier les definitions Matematiques, il n'eut defini les proportionalitez ſuiuant cete imagination: & peut eſtre ceus qui ſeroient venus apres luy, auroient admis ſes definitions, & les auroient paſſées pour bones. Mais puiſque pour vſer de ſes termes, il ne s'eſt pas trouué au tems du ſiecle ſage, & qu'il n'a pas eſté des premiers a traiter de ces matieres, ie penſe qu'il vaudra mieus ſe tenir aus ancienes definitions, que d'en admetre ſans neceſſité ny vtilité de noueles, qui pouroient cauſer de la confuſion. Que ſi c'eſtoit pour perfectioner ce qui a eſté dit auparauant ſur ce ſujet, & mieus expliquer la nature de la choſe, il n'y-a point de doute qu'il faudroit ſuiure ſes nouueles definitions, & qu'on luy en auroit bien de l'obligation; de meſmes que ſi quelcun nous donoit vne autre definition des grandeurs proportioneles, que la 6e du 5e des Elemens, laquele, à dire le vray, ſemble vn peu obſcure; & qu'il nous fit mieus conoitre la nature

des grandeurs proportioneles, il eſt certain qu'on luy en ſeroit fort redeuable; mais de vouloir ſimplement changer les noms qui ſont admis, c'eſt ce qui n'eſt pas moins inutile que ridicule. Car qu'importe que la proportionalité de toutes ſortes de termes proportionaus ſoit apelée Geometrique, ou que ce ſoit ſeulement celle des grandeurs proportioneles? Il eſt tres-vray qu'on pouuoit definir les proportionalitez ſelon le ſens de Steuin, mais ie m'aſſeure que, come il s'eſt meſlé de reprendre les definitions que nous auons auiourd'huy, il n'auroit pas manqué, pour faire parler de luy, de reprendre celles qu'il propoſe, ſi les anciens nous les auoient laiſſées. Pour ce qui eſt de la confuſion que ces definitions cauſent à ſon auis, dans les Matematiques il nous auroit bien fait plaiſir de la montrer & de ne pas parler ſi legerement; car ie puis dire qu'il y-a beaucoup de perſones qui n'y en trouuent aucune; & pour moy il me ſemble qu'il n'eſt rien de plus clair, que les definitions de ces proportionalitez: dont l'vne eſt, que la Geometrique eſt celle dont les termes ſont proportionaus: la 2e. que la proportionalité eſt Aritmetique lors qu'ils ont meſmes diferences les vns que les autres; & la 3e. que l'Armonique eſt quand les extremes de trois nombres, ont meſme proportion, que les diferences des deus plus grans & des deus moindres; le tout ſoit que les termes ſoient des grandeurs, ſoit que ce ſoient des nombres, puis que les grandeurs, & les nombres ſont egalement capables de toutes ſortes de proportions, & de diferences. Ie ſay bien d'ailleurs, que vouloir changer ce qui a eſté admis iuſques icy, cauſeroit bien plus de confuſion que de le laiſſer come il eſt: & qu'ayant conçeu la proportion Aritmetique, ſelon Steuin, & venant à lire chez vn autre Auteur que c'eſt autre choſe; vn eſprit ſe trouueroit bien embaraſſé dans ces varietez. De dire qu'il faloit denomer les proportionalitez ſelon la matiere, pour ſuiure la nature des choſes, c'eſt vne abſurdité, puis que la forme eſt la principale partie de la choſe, & ce qui luy done eſtre, & non pas la matiere: & partant l'egalité des proportions ou des diferences eſtant ce qui conſtituë la proportionalité, & non pas les termes (qui, come nous auons dit, ſont indiferens, & peuuent receuoir toutes les trois) il

a eſté bien plus à propos de doner les noms ſelon les proportions & les diferences, que ſelon les termes. Et parce que l'egalité des proportions ſemble plus naturele aus grandeurs, les plans ſemblables ayans la proportion doublée, & les ſolides ſemblables la proportion triplée, de leurs cotez homologues qui ſont des proportions continuës de termes proportionaus: on a nomé proportionalité Geometrique, celle dont les termes ſont en meſme proportion. De meſme parce que l'egalité des diferences, ſe trouue naturelement dans la ſuite ordinaire des nombres, qui diferent tous de l'vnité: en fin, parce que les nombres de la 3e proportionalité, ſont ſouuent des conſonances Muſicales; on a apelé proportionalité Aritmetique, celle dont les termes gardent meſme diference; & Armonique cete derniere, quoy que les grandeurs ſoient auſſi capables de conſtituer la proportion Aritmetique, & Armonique, que la Geometrique; de meſme que les nombres (& par conſequent auſſi les ſons, qui ne ſont que des nombres armonieus) peuuent auſſi bien former la Geometrique & l'Armonique, come l'Aritmetique.

Et ne faut point aleguer l'autorité d'Euclide, qui definit les nombres proportionaus, ceus dont le 1er contient autant le 2e, que le 3e contient le 4e, &c. ny inferer de là qu'il a voulu definir la proportion Aritmetique, puis qu'il ne parle pas de la Geometrique, & qu'il ne s'agit icy que des nombres: car Euclide, qui (non plus que tous les Geometres & Aritmeticiens) ne tenoit pas pour proportionaus, les nombres qui n'auoient pas la proportion Geometrique, n'auoit pas beſoin de dire que c'eſtoit de la Geometrique qu'il entendoit parler, ſachant bien que ce n'eſt qu'en celle-là, que ſe trouue l'egalité des proportions. Auſſi n'a-t'il pas parlé de la proportion Aritmetique, parce que les nombres qui ſont proportionaus Aritmetiquement, ne ſont pas ſimplement proportionaus. De dire qu'il n'auoit que faire de nomer la qualité de la proportion dont il parloit, cela ne ſe peut, puiſque les nombres ſont capables de toutes les trois, & partant il eut eſté neceſſaire d'expliquer de laquele des trois il entendoit ſa definition, s'il n eut eu deſſein de deſigner celle dont perſone ne pouuoit douter, qui eſt la Geometrique.

Mais quand bien Steuin auroit eu raiſon, de vouloir que les proportionalitez fuſſent denomées ſelon la matiere à quoy elles ſont apliquées, & non pas ſelon les proportions & les diferences; & qu il fut vray que 2. 4. 3. 6. ne fiſſent pas proportion Geometrique, il deuroit pour le moins nous auoir expliqué, ce que ſeroit que cete autre 4. 5. 6. 7. qui ſelon luy n'eſt pas Aritmetique, & come quoy on la deuroit apeler dorenauant. Ce que n'ayant pas fait, nous conclurons qu'il ſera plus à propos de conſeruer les definitions ordinaires, que de ſuiure les ſienes.

Voila les queſtions que i'ay creu eſtre obligé de traiter, pour refuter les erreurs de Steuin, deuant que d'expliquer toutes les definitions Aritmetiques, & les propoſitions dont nous auons beſoin. Quoy que nous ayons aſſez parlé des definitions de l'vnité, du nombre, & des proportions : nous ne laiſſerons pas de les definir encor icy, pour faire voir tout d'vne ſuite & ſans interruption, toutes celles qui ſont neceſſaires pour entendre les propoſitions numerales.

DEFINITIONS.

1. L'VNITE' eſt, ce qui peut eſtre conçeu come vne ſeule choſe.

Ainſi les choſes les plus compoſées pouront eſtre des vnitez Aritmetiques; & vne maiſon bien que compoſée de pierre, de bois, & de choſes ſemblables, peut eſtre priſe pour vnité, puis qu'on la peut conceuoir come vne ſeule choſe. Mais ſelon ce qui a eſté dit en la 2e queſtion, l'vnité Aritmetique eſt le concept general de ſingularité, ou bien l'vnité en general, abſtraite & détachée des choſes.

2. Le nombre eſt vne multitude compoſée d'vnitez.

3. Vn moindre nombre eſt partie d'vn plus grand, lors qu'il le meſure, c'eſt à dire qu'il y eſt contenu tant ou tant de fois.

Ainſi 2. eſt partie de 6. parce qu'il le meſure, c'eſt à dire, qu'il eſt contenu exactement en 6. ſauoir trois fois.

4. Vn moindre nombre eſt pluſieurs parties d'vn plus grand, lors qu'il ne le meſure pas.

Vn nombre ne meſure pas vn autre nombre, lors qu'il n'y eſt pas contenu exactement. De cete ſorte 4. ne meſure pas 15. parce qu'eſtant repeté 3. fois, il eſt moindre, & qu'eſtant pris 4. fois il eſt plus grand. Et partant il eſt pluſieurs parties de 15. ſauoir $\frac{4}{15}$ ou 4. vnitez, dont chacune eſt la 15e partie de 15.

5. Vn plus grand nombre eſt multiple d'vn moindre, quand le moindre meſure le plus grand.

Le nombre 20. eſt multiple de 4. parce que 4. meſure 20. dans lequel il eſt contenu 5. fois.

6. Nombre pair eſt celuy qui ſe peut diuiſer en deus parties egales.

Tels ſont 6. & 10. qui ont pour moitiez 3. & 5.

7. Nombre impair, eſt celuy qui ne peut eſtre diuiſé en deus parties egales; ou qui difere d'auec vn nombre pair, de l'vnité.

Par cete raiſon 9. eſt nombre impair, ne pouuant eſtre diuiſé en deus parties egales. Et ſa diference d'auec 8. & 10. qui ſont les plus proches pairs, eſt 1. c'eſt à dire, que pour d'vn pair former vn impair, il ne faut qu'y adiouter ou en tirer l'vnité.

8. Nombre premier, eſt celuy qui n'a point d'autre meſure que l'vnité.

Si vn nombre n'eſt meſuré de pas vn autre nombre, mais de l'vnité ſeulement, il eſt apelé nombre premier, come ſont 2. 5. 13. qui ne ſont meſurez que de l'vnité.

9. Les nombres ſont premiers entre eus, qui n'ont autre meſure comune que l'vnité.

Tels ſont les nombres 4. & 7. parce qu'il n'y a aucun nombre qui les meſure tous deus.

On voit que le terme de (premier) peut eſtre abſolu & relatif; car vn nombre eſt premier ſans eſtre comparé à quelque autre, ſelon le ſens de la precedente definition, & peut eſtre premier à vn autre nombre, ſelon celle-cy.

10. Nombre compoſé eſt celuy qui eſt meſuré de quelque autre nombre.

Come le nombre 12. lequel eſt compoſé, parce qu'il eſt meſuré du nombre 4.

11. Des nombres ſont compoſez entre eus, quand ils ont vn autre nombre pour meſure comune.

Les nombres 18. & 6. ſont compoſez entre eus, parce que le nombre 3. les meſure tous deus.

Ces deus dernieres definitions ont meſme raport l'vne à l'autre,

l'autre, que les deus precedentes: & on peut faire la meſme remarque ſur le mot de (compoſé) que ſur celuy de (premier.)

Au reſte on peut bien conoitre, par ces meſmes definitions, qu'Euclide ne met pas l'vnité au rang des nombres: car autrement la definition du nombre compoſé ſeroit fauſſe de la façon qu'elle eſt conceuë, puiſque ſi l'vnité eſtoit nombre, il n'y auroit point de nombre, hormis l'vnité, qui ne fût compoſé, tout nombre eſtant meſuré de l'vnité, & partant il faudroit y adiouter ces mots (autre que l'vnité:) mais come ils ne ſe trouuent pas dans le texte d'Euclide, c'eſt bien vne preuue aſſeurée, qu'il ne tenoit pas l'vnité pour nombre.

12. Vn nombre multiplie vn autre nombre, lors que le multiplié eſt repeté autant de fois, qu'il y a d'vnitez au multipliant, & que de cete repetition il s'en produit vn 3e.

De cete ſorte le nombre 4. eſtant repeté autant de fois, qu'il y a d'vnités en 6. c'eſt à dire, 6. fois, & produiſant par cete repetition, le nombre 24. eſt multiplié par le nombre 6. Et partant,

La multiplication d'vn nombre par vn autre, eſt l'inuention d'vn nombre, qui contiene autant de fois l'vn des propoſez, qu'il y a d'vnitez en l'autre.

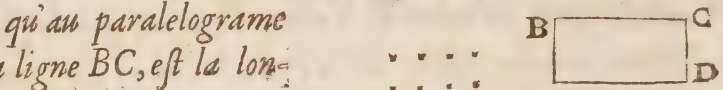
Come en cet exemple, 24. contient autant de fois 4. qu'il y a d'unitez en 6. On peut auſſi en ſuite definir la diuiſion, qui eſt le contraire de la multiplication, en cete ſorte.

La diuiſion d'vn nombre par vn autre, eſt l'inuention d'vn 3. nombre, qui ſoit autant contenu dans le plus grand des propoſez, c'eſt à dire, dans le diuiſé, lequel doit eſtre cenſé le plus grand, qu'il y a d'vnitez en l'autre.

Car ſi on diuiſe 20. par 5, il en viendra 4. qui eſt autant contenu en 20. qu'il y a d'vnitez en 5.

13. Le nombre qui eſt produit de la multiplication de deus nombres, eſt apelé nombre plan. Et les nombres de cete multiplication, ſes côtez.

Ainſi le nombre 8. produit de la multiplication de 4. par 2. eſt nombre plan, & les nombres qui le produiſent, ſont ſes côtez. Cete denomination de plan vient de la reſſemblance qu'il y a entre ce produit, diſpoſé en long & en large, ſelon les vnitez de ſes côtez, & vn paralelograme Geometrique, le nombre 4. repreſentant la longueur, & 2. la largeur de meſme qu'au paralelograme BD, la ligne BC, eſt la longueur, & CD, la largeur.



14. Nombre quaré, eſt vn nombre produit de la multiplication d'vn nombre par ſoy-meſme. Ou bien eſt vn nombre plan dont les côtez ſont egaus. Et le nombre qui le produit par ſa multiplication, eſt apelé ſon côté ou ſa racine quarée. Il eſt encores definy, nombre egalement egal.

Lors que les côtez du nombre plan ſont egaus, le nombre plan s'apele nombre quaré, parce que ſes vnitez eſtans diſpoſées en long & en large, ſemblent repreſenter vn quaré ſuperficiel, à cauſe de l'egalité de ſes côtez, come il ſe voit au nombre 25. dont les côtez ſont 5. & 5. ou plutot ſon coté ou ſa racine quarée eſt 5. de meſme qu'en la ſuperficie quarée B D, la ligne BC, ou CD, eſt ſon coté.

Il eſt manifeſte, que ſuiuant cete definition, qui eſt receuë de tout le monde, il y a des nombres quarez, & d'autres qui ne le ſont pas, quoy qu'en puiſſe dire Steuin, qui s'eſt imaginé que tous les nombres eſtoient auſſi bien quarez les vns que les autres. Mais reſeruant la refutation de cete opinion pour vn lieu plus comode, qui ſera la 2e. partie de cete introduction, ie me contenteray pour cete heure de remarquer, qu'vn nom-

bre peut sembler plan inegal, c'est à dire n'estre pas quaré, lequel ne laissera pas de l'estre, & cela à cause des diuers cotez dont vn mesme nombre peut estre produit: par exemple, le nombre 64. est quaré, parce que son coté est 8. & neanmoins il pouroit sembler n'estre pas quaré, à cause de ses autres cotez inegaus 2. 32. ou bien 4. 16.

15. Proportion est l'habitude, cõparaison, ou raport d'vn nombre à vn autre nombre, selon ce qu'vn nombre est egal, multiple, partie, ou plusieurs parties d'vn autre nombre, ou bien le contient vne ou plusieurs fois, & de plus sa partie, ou ses parties.

Cete definition a esté assez expliquée en la 5e. queſtion.

16. Les nombres sont proportionaus, lors que le premier est autant multiple du 2e que le 3e du 4e, ou que le 1er est la mesme partie, ou les mesmes parties du 2e, que le 3e du 4e. Ou lors que le 1er contient autant de fois le 2e, & de plus la mesme partie ou les mesmes parties du 2e, que le 3e contient le 4e, & de plus sa partie, ou ses parties.

Voyez la 5e & la 6e queſtion.

17. Nombres plans semblables, sont ceus dont les cotés sont proportionaus.

Ayant conceu ce que c'est que nombre plan, & quels sont les nombres proportionaus, il est aisé de comprendre cete definition, & quels sont les nombres plans semblables. Car puisque le nombre plan est produit de la multiplication de deus nõbres, qui sont ses cotez: si la proportion des mesmes cotez se retrouue en deus autres nombres, & que ces deus derniers soient multipliez l'vn par l'autre, les deus produis seront plans semblables, à cause de la proportion des deus cotez de l'vn, egale à la proportion des deus cotez de l'autre. Ainsi 2. 3. se multiplians l'vn l'autre, produisent 6. Et parce que 4. 6. sont en mesme proportion que 2. 3: si on multiplie 4. par 6. leur produit 24. sera nombre plan, semblable à 6. premier produit.

Selon cete definition les nombres quarez ſont plans ſemblables, puiſque leurs cotez ſont proportionaus, & que chacun d'eus les ayant touiours egaus, il y a entre ceus de l'vn & ceus de l'autre proportion d'egalité. Ainſi les cotez de 9. ſont 3. & 3. qui ſont en meſme proportion que 8. & 8. cotez de 64.

18. Vn nombre meſure vn autre nombre, par celuy de la multiplication duquel il produit le nombre meſuré.

Nous auons dit ſur la 7e definition, qu'vn nombre meſure vn nombre, lors qu'il y eſt contenu tant ou tant de fois. Or ce tant ou tant de fois ſera exprimé par les vnitez d'vn autre nombre; & ce nombre eſt celuy par lequel le nombre meſurant meſure le nombre meſuré. D'où il s'enſuit que le meſurant multipliant celuy par lequel il meſure, doit produire le nombre meſuré. De cete ſorte, parce que 5. eſt contenu 9. fois en 45. il meſure 45. par 9: & partant 5. eſtant multiplié par 9. produit 45.

19. Les termes d'vne proportion, ſont les moindres nombres de cete proportion.

Parce que 4.3. ſont les moindres de leur proportion, ils ſont apelez les termes de cete proportion, come ceus au deſſous deſquels on ne peut paſſer.

20. Quand trois nombres ſont proportionaus, le 1er eſt au 3e en proportion doublée de la proportion du 1er au 2e. Et s'il y-a quatre termes proportionaus, la proportion du 1er au 4e s'apele proportion triplée du 1er au 2e. S'il y en a cinq, elle eſt quadruplée; & ainſi des autres.

de la proportion

Cete definition eſt expliquée pour les grandeurs en la 10e. definition du 5. liu. de façon que nous en donerons ſeulement des exemples. Les nombres proportionaus 3. 9. 27. eſtans donc propoſez, la proportion de 3, à 27. eſt doublée de la proportion de 3. à 9. Et ſi on en adioute encore deus autres en la meſme proportion continuë, ſauoir 81. 243. la propor-

tion de 3. à 81. ſera triplée de la proportion de 3. à 9. & celle de 3. à 243. quadruplée de la meſme proportion. En vn mot la proportion doublée veut dire, qu'il y a entre les nombres de la proportion, vn terme moyen, qui fait auec les deus autres, trois nombres proportionaus; la triplée, qu'il y a deus moyens en proportion continuë; la quadruplée, qu'il y en a 3. &c.

AXIOMES.

1. L'VNITE' meſure vn nombre par les vnitez dont il eſt compoſé.

Cela eſt certain, puiſque l'vnité priſe autant de fois qu'il y a d'vnitez en vn nombre, fait le nombre.

2. Tout nombre ſe meſure ſoy-meſme par l'vnité.

C'eſt à dire que chaque nombre eſt vne fois ſoy-meſme.

3. Si deus nombres par leur multiplication en produiſent vn, chacun d'eus meſure ce produit par l'autre.

Parce que 4. & 8. produiſent 32: 8. meſure 32. par 4. puis qu'il eſt autant de fois en 32. qu'il y a d'vnitez en 4. Et par meſme raiſon 4. meſure 32. par 8.

4. Si vn nombre meſurant vn autre nombre, multiplie celuy par lequel il le meſure: il produira le nombre meſuré.

Ainſi parce que 2. meſure 8. par 4. c'eſt à dire, qu'il eſt contenu 4. fois en 8; multipliant 4. il produira 8.

5. Si vn nombre meſure d'autres nombres, il meſurera le compoſé des meſmes nombres.

Ce principe eſt conu par lumiere naturele: car ſi le nombre A, meſure les deus nombres BC, CD, il meſurera auſſi le total BD, qui en eſt compoſé, puiſqu'il y ſera contenu autant de fois, qu'aus deus ſeparez.

A 3.

B 9 C 15 D

6. Si vn nombre mesure vn autre nombre, il mesurera aussi tout ce qui en sera mesuré.

Car si A mesure B, & que B, mesure CG, le mesme CG contiendra plusieurs fois B: & partant, si on diuise CG, en parties egales à B; A, mesurera chacune de ces parties, sauoir C D, D F, F G, & par consequent mesurera leur composé CG, par le 5e. axiome.

A3.
B9.
C9D9F9G.
27

7. Si vn nombre mesure vn autre nombre, & l'vne de ses parties, il mesurera aussi le reste.

Car si le nombre A, mesure le total B D, & la partie B C; B D, contiendra plusieurs fois A; & B C, contiendra aussi le mesme A, vne ou plusieurs fois. Si donc on diuise les nombres B D, B C, en parties egales au nombre A, le nombre C D, sera necessairement vne ou plusieurs de ses parties, (autrement tout B D n'auroit pas esté diuisé en parties egales au nombre A) & partant A, mesurera C D.

A2.
B8 C16 D.

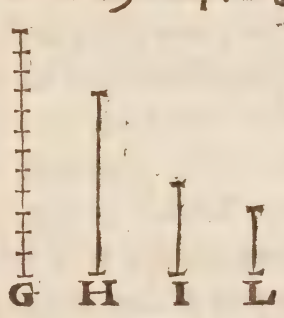
AVERTISSEMENT.

Nous auons choisy les 24. propositions suiuantes parmy toutes celles des trois liures Aritmetiques d'Euclide, les ayant iugées sufisantes pour notre traité Celles que nous auons obmises, ou ne le concernent pas, come sont toutes celles des nombres solides, parce qu'il n'est fait aucune mention des cors solides dans notre diziéme liure; ou bien doiuent estre tenuës pour demontrées en nombres, puisqu'elles ont esté demõtrées en grandeurs au cinquiéme liure, & ailleurs, n'y ayant point de nombres qui ne puissent estre representez par des grandeurs, quoy que toutes sortes de grandeurs ne le puissent pas estre par des nombres. Telles

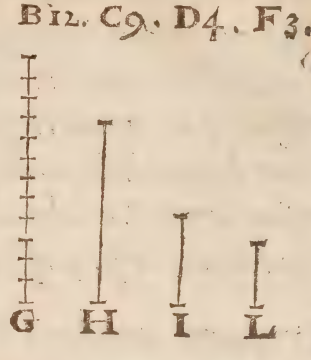
ſont toutes les propoſitions des proportions numerales demontrées au 7e liure, come la 13e. 14e. 19e. & autres, leſqueles pour cete raiſon nous ne demontrerons pas d'auantage, come eſtant fort aiſé d'apliquer les nombres aus grandeurs, ou pour mieus dire, de repreſenter des nombres par des grandeurs. Par exemple, ſi on veut demontrer la permutation des nombres proportionaus, ſuposant la 16e. 5e. qui demontre la permutation des grandeurs proportioneles, ce ſera aſſez d'y proceder de cete ſorte.

Si quatre nombres ſont proportionaus; en permutant ils ſeront auſſi proportionaus.

Que les nombres B, C, D, F, ſoient proportionaus, c'eſt à dire, qu'il y ait meſme proportion de B, à C, que de D, à F. Ie dis qu'en permutant, il y a meſme proportion de B, à D, que de C à F. Que la ligne G, priſe de quelle grandeur on voudra, ſoit diuiſée en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez en B, & que les trois autres lignes H, I, L, ſoient priſes chacune d'autant de parties egales à celles de G, qu'il y a d'vnitez aus trois nombres C, D, F, en ſorte que chaque grandeur repreſente chaque nombre. Et les quatre grandeurs G, H, I, L, ſeront en meſme proportion que les quatre nombres B, C, D, F. Car chacune d'elles eſt compoſée d'autant de parties egales les vnes aus autres, que les nombres ſont compoſez d'vnitez, par la conſtruction; & partant G, contiendra autant de fois H, que B, contient C; ou bien G, ſera la meſme partie, ou les meſmes parties d'H, que B, de C; ou bien G, contiendra autant de fois H, & de plus la meſme partie ou les meſmes parties d'H, que B contiendra C, & de plus la partie ou les parties de C, puiſqu'il ne peut y auoir d'autres proportions que celles là entre des nombres par la 15. *definition*. Le meſme ſe prouuera d'H, I, & d'I, L, par la meſme metode,



par le moyen des nombres C, D, F; de la meſme ſorte on prouueta auſſi que G, I, ſont en meſme proportion que B, D; & H, L, que C, F. Et toutes les proportions que peuuent auoir les quatre nombres comparez l'vn à l'autre come on voudra, ſe trouueront eſtre aus grandeurs comparées enſemble, pourueu qu'on prene les grandeurs homologues & coreſpondantes aus nombres: & partant les quatre grandeurs ſeront proportioneles, puiſque les quatre nombres ſont proportionaus.



16.5. Or entre les meſmes grandeurs come G, à I, ainſi H, à L: donc en prenãt les nõbres qui leur ſont homologues B, D, C, F, il y aura meſme proportion de B, à D, que de C, à F. Ce qu'il faloit demontrer.

On poura de la meſme ſorte demontrer en nombres, toutes les propoſitions qui ont eſté demontrées en grandeurs aus 2e. & 5e. liures, où les nombres pouront quadrer, en prenant touiours les grandeurs qui expriment les nombres propoſez: ce qu'Euclide & quelques vns de ſes interpretes ont bien reconu, puiſqu'en la 15e. 9e. & au Lem. de la 29e. 10e. qui ſont propoſitions Aritmetiques, ils ſe ſeruent des propoſitions du deuzieme liure, quoy qu'elles n'ayent eſté demontrées qu'en grandeurs, & non pas en nombres.

Et pour cete raiſon nous citerons auſſi toutes les propoſitions, qui ont eſté demontrées en grandeurs dans les ſis premiers liures, lors que nous en aurons beſoin: de meſmes que ſi elles eſtoient demontrées en nombres.

PROPOSITION I. TEOREME I. 16.7.

SI deus nombres se multiplient mutuelement l'vn l'autre, les produis seront egaus.

Que le nombre B, multipliant le nombre C, produise D, & que C, multipliant B, produise F. Ie dis que les nombres F, & D, sont egaus,

1
B 2. C 3.
F 6. D 6.

Car puisque B multipliant C, produit D, il y a mesme [a] proportion de l'vnité à B, que de C, à D, veu que C, est [b] autant contenu en D, que l'vnité en B.

[a] 16. def. 7.
[b] 22. def. 7.

Par mesme raison, il y aura mesme proportion de l'vnité à C, que de B, à F; & en [c] permutant mesme proportion de l'vnité à B, que de C, à F.

[c] 16. 5.

Or come l'vnité à B, ainsi C, à D. Donc le nombre C, a mesme proportion à F, qu'à D, sauoir celle de l'vnité à B. Et partant [d] F, D, sont egaus.

[d] 9. 5.

PROP. II. TEOR. II. 17.7.

Si vn nombre en multiplie deus autres, les produis auront mesme proportion que les multipliez.

Que le nombre B, multipliant C, produise E, & multipliant D, produise F. Ie dis que come C, à D, ainsi E, à F. Car on prouuera, come en la precedente, que come l'vnité à B, ainsi C, à E; & come l'vnité au mesme B, ainsi D, à F: & partant il y a mesme proportion de C, à E, que de D, à F, & en [e] permutant come C, à D, ainsi E, à F.

1
B 2. B 2.
C 3. D 4.
E 6. F 8.

[e] 16. 5.

COROL.

Si deus nombres en multiplient vn autre, les produis auront mesme proportion que les multiplians. Car en la

derniere figure, ſi C, & D, multiplient B, ils produiront encores les meſmes E, F, que B, a produis en multipliant C, D. Et partant nous ſerons encores dans les termes de cette propoſition.

PROP. III. TEOR. III.

Les nombres qui ſont les moindres de leur proportion meſurent egalement les autres nombres de la meſme proportion, le plus grand le plus grand, & le moindre le moindre.

Qu'il y ait meſme proportion d'AB, à CD, que d'E, à F, en ſorte que AB, CD, ſoient les moindres de cete proportion. Ie dis qu'AB, meſure autant de fois E, que CD, meſure F. Car en permutant AB, aura meſme proportion à E, que CD, à F. Donc AB, CD, come eſtans moindres, ſeront chacun [a] ou partie, ou pluſieurs parties des nombres E, F.

2.	3.
AGB	CHD
E 4.	F 6.

[a] 16. def.

Or ils ne ſeront pas pluſieurs parties de ces nombres. Car autrement qu'ils ſoient pluſieurs parties des nombres E, F, s'il eſt poſſible. Ayant diuiſé AB, en AG, GB, qui ſoient parties d'E, & CD, en CH, HD, qui ſoient parties d'F, la multitude des parties qui ſont en AB, ſera egale à la multitude des parties qui ſont en CD, puiſqu'AB, eſt à E, come CD à F: & par conſequent AG, ſera [b] meſme partie d'E, que CH, d'F. Donc come AG, à E, ainſi CH à F; & en [c] permutant come AG, à CH, ainſi E, à F. Et partant les nombres AB, CD, ne ſont pas les moindres de leur proportion, puiſqu'AG, CH, ſont moindres & en meſme proportion, contre l'hipoteſe.

[b] 16. def.

[c] 16. 5.

AB, CD, ne ſont donc pas pluſieurs parties d'E, F: mais partie ſeulement: & parce que AB, CD, E, F, ſont proportionaus, AB, ſera meſme partie d'E, que CD, d'F. Et partant AB meſurera autant E, que CH, meſurera F.

Prop. IIII. Teor. IIII. 23. 7.

Les nombres premiers entre eus, ſont les moindres de leur proportion.

Que les nombres A, B, ſoient 1ers entre eus. Ie dis qu'ils ſont les moindres de leur proportion. Autrement que les nombres C, D, ſoient moindres en la meſme proportion s'il eſt poſſible: ils meſureront [a] donc egalement les nombres A B. Que ce ſoit par le nombre E. Or le meſme nombre E, meſurera auſſi A, B, par C, D, puiſqu'E, produit [b] autant en multipliant C, que C, multipliant E, & produit autant multipliant D, qu'eſtant multiplié par D. Donc les nombres A, B, eſtans meſurez par E, ne ſont pas 1ers entre eus, contre l'hipoteſe. Et partant les nombres C, D, ne ſont pas moindres en la proportion d'A, B, que les meſmes nombres A, B.

A 2. B 3.
C D
E

a 3. P.

b 15. P.

Prop. V. Teor. V. 24. 7.

Les termes d'vne proportion ſont premiers entre eus.

Que les nombres R, S, ſoient les termes de leur proportion. Ie dis qu'ils ſont premiers entre eus. Car autrement que C, ſoit leur comune meſure, s'il eſt poſſible, meſurant R, par D; & S, par E. Donc C, multipliant D, E, produit R, S: & partant, come D, à E, ainſi R, à S. Donc puiſque D, E, ſont moindres qu'R, S; les nombres R, S, ne ſont pas les moindres de leur proportion, contre l'hipoteſe. Les nombres R, S, ſont donc premiers entre eus.

R 2. S 3.
C
D E

Prop. VI. Teor. VI. 25. 7.

Si deus nombres ſont premiers entre eus; le nombre qui meſurera l'vn d'eus, ſera premier à l'autre.

Que les nombres B, C, ſoient premiers entre eus, & que

D, mesure B. Ie dis que D, C, sont 1ers entre eus. Autrement qu'E, soit leur comune mesure, s'il est possible.

[a] 5. axi. Donc puisqu'E, mesure D, il[a] mesurera aussi B, qui est mesuré de D. Or il mesure aussi C, par l'hipotese: donc B, C, ne sont pas premiers entre eus, contre l'hipotese. Et partant D, C, sont 1ers entre eus.

B 4. C 3. D 2. E

26.7. PROP. VII. TEOR. VII.

Si deus nombres sont premiers à vn 3e nombre, leur produit luy sera aussi premier.

Que les nombres B, C, soient premiers au nombre D. Ie dis que le nombre E, qui est leur produit, est aussi 1er à D. Autrement, que la comune mesure de D, E, soit F, s'il est possible, mesurant E, par G. Donc F, multipliant G, produit E, lequel est aussi produit par les nombres B, C.

B 2. C 3. D 5. F. E 6. G.

[b] 4. axi. [c] 16. 6.

Et partant come F, à B, ainsi C, à G. Et parce que par l'hipotese B, D, sont[c] premiers entre eus, & qu'F, est supose mesurer D: le mesme nombre F, sera[d] aussi premier à B. Et par-consequent F, B, sont les moindres de leur proportion, & mesureront[e] egalement C, G, c'est à dire qu'F, mesurera C; & B, mesurera G. Donc C, D, estans tous deus mesurez par F, ne sont pas premiers entre eus, contre l'hipotese. Les nombres D, E, sont donc premiers entre eus.

[c] 6. p. [d] 4. p. [e] 3. p.

27.7. PROP. VIII. TEOR. VIII.

Si deus nombres sont premiers entre eus, le quaré de l'vn sera premier à l'autre.

Que les nombres B, C, soient premiers entre eus, & que le quaré de B, soit D. Ie dis que B, D, sont premiers entre eus. Ayant pris G, egal à B, puisque B, G, sont premiers à C; leur produit, c'est à dire le quaré de B, sera[f] premier à C. On prouuera de la mesme sorte, que le quaré de C, est premier à B.

B 2. C 3. D 4. G 2.

[f] 5. p.

PROP. IX. TEOR. IX. 28. 7.

Si deus nombres ſont premiers à deus nombres, l'vn & l'autre, à l'vn & à l'autre : leurs produis ſeront auſſi premiers entre eus.

Que chacun des nombres B, C, ſoit premier à tous les deus nombres D, G. Ie dis que le nombre K, produit de B, C, eſt premier au nombre L, produit de D G. Car puiſque B, C, ſont tous deus premiers à D ; leur [a] produit K, luy ſera auſſi premier. Par la meſme raiſon K ; ſera encores 1er. à G. Donc puiſque D, G, ſont 1ers à K, leur produit L, [b] luy ſera auſſi premier.

B 2. C 5.
D 3. G 7.
K 10. L 21. [a] 7.7.
[b] 7.7.

PROP. X. TEOR. X. 29. 7.

Si deus nombres ſont premiers entre eus ; leurs quarez le ſeront auſſi. Et s'ils multiplient leurs quarez, les produis ſeront auſſi premiers entre eus.

Que les nombres B, C, ſoient 1ers. entre eus. Ie dis que leurs quarés F, G, ſont auſſi premiers entre eus, & que le nombre H, produit de B, F, eſt auſſi premier à K, produit de C G.

Premierement F, [c] eſt premier à C ; & G, à B, puiſque B, C, ſont premiers entre eus ; & par la meſme raiſon F, C, eſtans premiers l'vn à l'autre, G ſera premier à F. De plus puiſque, come nous venons de montrer les nombres B, F, ſont premiers aus nombres C, G, l'vn & l'autre, à l'vn & à l'autre ; leurs [d] produis H, K, ſeront auſſi premiers entre eus.

B 3. C 5.
F 9. G 25. [c] 8.7.
H 27. K 125. [d] 9.7.

PROP. XI. TEOR. XI.

Si plusieurs nombres sont continuelement proportionaus, & que les extremes soient premiers entre eus: ils sont les moindres de tous ceus qui ont mesme proportion.

Que les extremes A, D, des quatre nombres continuelement proportionaus A, B, C, D, soient, premiers entre eus. Ie dis que les, nombres A, B, C, D, sont moindres de tous ceus qui sont en mesme proportion. Car s'ils ne sont pas les moindres; que les nombres E, F, G, H, soient les moindres, s'il est possible. Donc par égalité [a] come A, est à B, ainsi E, est à H. Or A, D, sont les moindres [b] de leur proportion, & partant ils mesureront egalement [c] E, H: ce qui est impossible, puisque A, D, sont plus grans qu'E H; par l'hipotese. Et partant A, B, C, D, sont les moindres de tous ceus, &c.

A 8. E.
B 12. F.
C 18. G.
D 27. H.

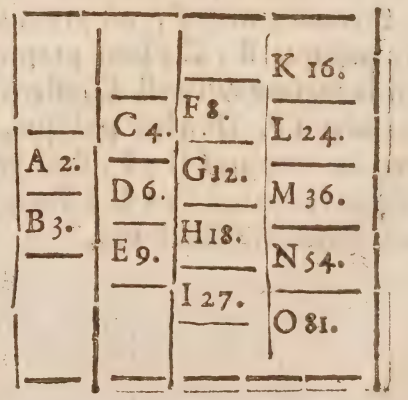
[a] 22. 5.
[b] 4. 7.
[c] 3. 7.

PROP. XII. PROB. I.

Trouuer autant de nombres qu'on voudra, continuelement proportionaus, les moindres de leur proportion.

Que les termes de la proportion donée soient A, B, en laquelle il faille trouuer les trois moindres nombres.

Qu'A, multipliant A, B, produise C, D; &, que B, se multipliant, produise E. Ie dis que C, D, E, sont les trois moindres de la proportion d'A, B. Premierement C, D, E sont continuelement proportionaus, car puisque A, multipliant A, B,



produit C, D, ces produis seront en [a] mesme proportion qu'A, B, & par mesme raison D, E, sont en mesme proportion, puis qu'ils sont produis par B, multipliant aussi A, B. Ils [b] sont aussi les moindres de cette proportion, puisque les extremes C, D, sont les quarez des nombres 1ers entre eus A, B, & partant aussi sont [c] 1ers. entre eus, & en suite les trois C, D, E, sont [d] les moindres de ceus qui ont mesme proportion. Que si A, multipliant C, D, E, produit F, G, H, & que B, multipliant E, produise I, les 4. F, G, H, I, seront les 4. moindres; ce qui se prouuera come des 3. premiers; car premierement F, G, H, auroit mesme proportion que C, D, E, c'est à dire qu'A, B, & parce qu'A, B, multiplians E, produisent, H, I, ces deus derniers auront encores mesme proportion qu'A, B. Or F, G, H, I, sont [e] les moindres, puisq' F, I, sont 1ers. entre eus. Le mesme se fera de quelque quantité de nombres que ce soit. [a] 2. 8. [b] 4. 8. [c] 10. 8. [d] 11. 8. [e] 11. 8. [f] 10. 8.

Corol.

Les extremes des 3. moindres nombres d'vne proportion, sont quarez & premiers entre eus, come il se voit en cet exemple.

Prop. XIII. Teor. XII. 18. 8.

Si deus nombres sont plans semblables, il y a entre eus vn moyen proportionel. Et les plans semblables sont en proportion doublée de leur cotés homologues.

1. Que les nombres B, C, soient plans semblables, & que les cotés de B, soient D, F; & ceus de C, soient G, H. Ie dis qu'entre B, C, il y a vn nombre moyen proportionel, & que la proportion de B, à C, est la proportion doublee des cotés homologues D, G, ou F, H.

B 12. I 18. C 27.
D 6. F 2. G 9. H 3.

2. Qu'F, multipliant G, produise I: & puisque multipliant D, le produit est B, il y aura [a] mesme proportion de B, à I, que [a]

de D, à G. Par meſme raiſon, puiſque le produit de G, F, eſt I; & que celuy de G, H, eſt C; I, eſt à C, come F, à H.

a 2. p.

3. Et parce que, come D, à F, ainſi G, à H; en permutant come D, à G, ainſi F, eſt à H. Or come D, à G, ainſi B, à I, & come F, à H, ainſi I, à C. Donc b come B, à I, ainſi I, à C; c'eſt à dire qu'I, eſt moyen proportionel entre B, C.

b 11. 5.

c 20. def. d 2. art.

4. Et partant B, eſt à C, en proportion c doublée de B, à I; c'eſt à dire d de D, à G, ou d'F, à H, qui ſont les cotez homologues des plans ſemblables B, C.

Corol. I.

Entre deus quarez il y a vn moyen proportionel; & les nombres quarez ſont en proportion doublée de leurs cotez; puiſque les nombres quarez ſont e plans ſemblables.

e An. 17. def.

Corol. II.

Si deus plans ſemblables ſe multiplient; leur produit ſera quaré. Car puiſqu'il y a entre eus vn moyen proportionel, leur produit f ſera egal à ſon quaré.

f 17. 6.

Prop. XIV. Teor. XIII.

Si entre deus nombres il y a vn moyen proportionel: il y en aura auſſi vn entre deus autres nombres de meſme proportion.

Qu'il y ait meſme proportion de B, à C, que de D, à F, & qu'E, ſoit moyen proportionel entre B, C. Ie dis qu'il y a auſſi vn moyen proportionel entre D, F.

B 2. E 4. C 8. I 16. D 3. G 6. F 12. K 36.

Puiſque come B, à C, ainſi D, à F, les g produis de B, C, & de D, F, ſauoir I, K, ſeront plans ſemblables

g 7. def.

blables. Or I, eſt quaré du moyen proportionel E, & partant a 17. 6.
a ſes cotez egaus: donc auſſi K, qui a ſes cotez proportionaus à ceus d'I, les aura auſſi egaus, & par conſequent ſera quaré, & ſon coté ſera b moyen proportionel entre D, F, puiſque b 17. 6.
eſtant multiplié par ſoy meſme, le produit ſera egal à celuy de D, F.

COROL.

Si deus nombres ont proportion de nombre quaré à nombre quaré, il y a entre eus vn moyen proportionel. Car puiſqu'il y en a vn c entre deus quarez, il c 1. Cor. 13. 8.
y en aura auſſi entre deus nombres qui auront la meſme proportion, par ce dernier Teoreme.

PROP. XV. TEOR. XIV. 26. 8.

Si deus nombres ſont plans ſemblables, ils auront proportion de nombre quaré à nombre quaré.

Que les nombres B, C ſoient plans ſemblables. Ie dis qu'ils ont proportion de nombre quaré à nombre quaré. Car puiſque B, C, ſont plans ſemblables, il y a entre eus vn moyen proportionel, lequel ſoit D: & qu'F, G, H ſoient les 3. d moindres de la proportion de B, à D; les extremes F, H, e ſeront quarez. Or par egalité de proportions B, eſt à C, come F, à H; donc B, eſt à C, come le quaré F, au quaré H.

B 12. D 6. C 3.
F 4. G 2. H 1.

d 12. 9.
e Cor. 12. 9.

PROP. XVI. TEOR. XV. 20. 8.

Si entre deus nombres il y a vn moyen proportionel: ils ſont plans ſemblables.

Qu'entre les nombres B, D il y ait vn moyen proportionel C. Ie dis qu'ils ſont plans ſemblables. Que les nombres F, G, ſoient les moindres de la proportion de B, C, leſquels par conſequent ils f meſureront egalement; que ce ſoit par 1: & par meſme raiſon ils me-

B 8. C 12. D 18.
F 2. G 3. I 4. K 6.

f 3. 8.

ſureront egalement C, D; que ce ſoit par K.

[a] 4 ax. Et partant I, multipliant F, G, [a] produit B, C; & K, multipliant F, G, produit C, D. Donc puiſ-

[b] 2. p. que G, multipliant I, K, produit C, D; il y a meſme proportion de C, à D, c'eſt à dire de B, à C, que d'I, à K.

B 8 C 12. D 18.
F 2. G 3. I 4. K 6.

Or B, par la conſtruction eſt à C, come F, à G; donc come F, à G, ainſi I, à K: & en permutant come F, à I, ainſi G, à K. Et parce que F, I, produiſent B, & que G, K, produiſent D; B, D, ſont plans ſemblables par la definition.

COROL.

Si deus nombres ſe multiplians l'vn l'autre produiſent vn quaré, ils ſont plans ſemblables. Car le coté de ce quaré ſera moyen proportionel entre eus; & partant ils ſeront plans ſemblables, par cete propoſition.

ANOTATION.

De tout ce qui a eſté dit, il s'enſuit que,

1. *Deus nombres immediats ne ſont pas plans ſemblables;*

[c] 23. p. *car s'ils l'eſtoient, il tomberoit [c] entre eus vn moyen proportionel, & partant ils ne ſeroient pas immediats.*

2. *Deus nombres qui ont proportion de nombres immediats, come tous les nombres qui ſont en proportion double, leſquels ſont come 2. à 1. nombres immediats, ne ſont pas plans ſemblables, car il tomberoit entre eus vn moyen proportionel,*

[d] 14. p. *& par conſequent [d] entre les deus immediats qui ſont de leur proportion: ce qui eſt abſurde.*

3. *Deus nombres premiers entre eus, qui ne ſoient pas quarez, ne ſont pas plans ſemblables, car il [e] tomberoit entre eus*

[e] 13. p. [f] 11. p. *vn moyen proportionel; & parce que tous les trois [f] ſeroient les moindres de leur proportion, les extremes eſtans premiers*

entre eus par l'hipoteſe, il s'enſuiuroit que les meſmes extremes ſeroient[a] *quarez, contre l'hipoteſe.* a Cor. 12. p.

4. *Tous nombres premiers en quelque multitude qu'ils ſoient, ne ſont pas plans ſemblables. Car n'ayans autres cotez qu'eus meſmes & l'vnité, ces cotez ne ſeront iamais proportionaus, puiſqu'il n'y aura iamais meſme proportion de l'vnité à vn nombre, que de l'vnité à vn autre nombre. Par exemple, les nombres 3. & 5. ont pour tous cotez 1, 3, & 1, 5, ſans qu'ils en ayent d'autres, non plus que les autres nombres premiers, autrement ils ne ſeroient pas premiers. Or il n'y a pas meſme proportion d'1. à 3. que d'1. à 5: Donc par la definition, 3. & 5. ne ſont pas plans ſemblables. Il ne faut pas neanmoins croire que tous nombres qui auront des cotez diſproportionez, ſoient neceſſairement plans diſſemblables, ſe pouuant faire qu'ils en auront outre cela d'autres qui ſeront proportionaus, ce qui leur ſufira pour eſtre plans ſemblables. Ainſi quoy que 12. & 48. ayent pour cotez 2. 6. & 3. 16. qui ne ſont pas proportionaus, ils ne laiſſent pas d'eſtre plans ſemblables, ayans pour cotez 3. 4. & 6. 8. qui ſont en meſme proportion.*

5. *Les nombres plans diſſemblables n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré. Car s'ils l'auoient, il tomberoit entre eus vn moyen proportionel; & partant ils ſeroient plans ſemblables, contre l'hipoteſe.* b Cor. 14. p. c 16. p.

PROP. XVII. TEOR. XVI. 30. 7.

Si deus nombres ſont premiers entre eus; leur compoſé ſera premier à chacun d'eus.

Car ſi D, compoſé des nombres premiers entre eus B, C,

n'eſt premier à chacun d'eus, qu'E, ſoit meſure comune de
7. ax. D, B. Donc E, [a] meſurant le total D, & la partie
B, meſurera auſſi le reſte C, & partant B, C, ne B 3. C 5.
ſont pas premiers entre eus, contre l'hipoteſe. D 8. E

18. & 19. 9.

PROP. XVIII. PROB. II.

A trois nombres donez troüuer vn 4e proportionel quand il eſt poſſible, & à deus vn 3e.

Que les trois nombres donez ſoient B, C, D, à qui il faille trouuer vn 4e. proportionel. Que C, multipliant D, produiſe G. Si donc B, meſure G, que ce ſoit par F. Ie dis qu'F, eſt 4e. proportionel à B, C, D. Car puiſque B, meſure G, par F; multipliant [b] F, il produira G. Or G, eſt auſſi produit de la multiplication de C, D: donc B, C, D, F, ſont [c] proportionaus.

E
B. C. D. F. G.
L. M. M.

b 4. ax. c 16. 6.

Mais ſi B, eſt premier à G, il n'y aura point de 4e. proportionel à B, C, D. Car autrement, qu'E, ſoit s'il eſt poſſible leur 4e. proportionel. Donc B, multipliant E, produira G, & partant [d] meſurera G, par E, contre l'hipoteſe, puiſque B, G, ſont ſupoſez premiers entre eus.

d 4. ax.

On trouuera de la meſme ſorte vn 3e. proportionel à deus donez, en prenant le ſegond deus fois, & le multipliant par ſoy-meſme come au ſegond exemple L, M.

ANOT.

Cete propoſition ne ſe doit entendre que des nombres entiers, non plus que la pluſpart des propoſitions de l'Aritmetique ſpeculatiue, parce que l'vnité ne s'y diuiſe point; mais lors qu'on veut diuiſer l'vnité, come il ſe peut aus nombres qui s'apliquent à la quantité continuë, on trouuera touiours vn 3e. & 4e proportionel à 2. & 3. nombres donez, & en la

derniere figure B, meſurera touiours G, par vn nombre entier, ou par vne fraction.

PROP. XIX. TEOR. XVII. 21. 9.

Si pluſieurs nombres pairs compoſent vn ſeul nombre; le total ſera pair.

Que les nombres pairs A B, B C, C D, compoſent le nombre A D. Ie dis que le nombre A D, eſt pair. Car puiſque tout nombre pair a[a] deus parties egales, ſi aus moitiez des nombres pairs propoſez, on adioute les autres moitiez, le total ſera double de la ſome des moitiez, & partant aura deus parties egales.

A 4 B 2 C 6 D
12.

[a] 6. def.

PROP. XX. TEOR. XVIII. 24 29. 9.

Si d'vn nombre pair on ote vn pair, le reſte ſera pair.

Du nombre pair B D, ſoit oté le pair C D. Ie dis que le reſte B C, eſt pair. Car ſi cela n'eſt pas, en ayant oté l'vnité, le reſte E C, ſera pair, & partant[b] auſſi le compoſé des deus pairs E D. Donc adioutant l'vnité à E D, le total[c] B D, ſera impair, contre l'hipoteſe. Le reſte B C, eſt donc pair.

B . E . . . C . . D

[b] 19. p. [c] 7. def.

PROP. XXI. TEOR. XIX. 26. 9.

Si d'vn impair on ote vn impair, le reſte ſera pair.

De l'impair B C, ſoit oté l'impair D C. Ie dis que le reſte B D, eſt pair. Car ſi des impairs B C, D C, on ote l'vnité, les reſtes B E, D E, ſeront pairs. Donc du nombre pair B E, ayant oté le pair D E, le reſte B D, ſera[d] pair.

B . . D . . E . C

[d] 20. p.

PROP. XXII. TEOR. XX.

28. 9.

Si vn pair ou vn impair multiplie vn nombre pair; le produit ſera pair.

Que le nombre pair ou impair B, multipliant le nombre pair C, produiſe D. Ie dis que D, eſt pair. Car puiſque B, multipliant C, produit D; le meſme D, contiendra autant de fois C, qu'il y a d'vnitez en B. Or C, eſt pair: donc D, compoſé de tous ces pairs ſera[a] pair.

B 4. 3. C 2. D 8. 6.

a 19. p.

22. 9.

PROP. XXIII. TEOR. XXI.

Si pluſieurs impairs compoſent vn ſeul nombre, & que leur multitude ſoit paire; le compoſé eſt pair.

Que la multitude des nombres impairs AB, BC, CD, DE, ſoit vn nombre pair, & que leur compoſé ſoit AE.

A...B.....C.....D.....E

Ie dis que le nombre AE, eſt pair. Car otant l'vnité de chacun des nombres compoſans, les reſtes[b] ſeront pairs; & partant auſſi le[c] compoſé de ces reſtes. Or les vnitez otées ſont en nombre pair; donc adioutant leur compoſé au compoſé des reſtes, les deus compoſez eſtans pairs, compoſeront vn nombre pair ſauoir AE.

b 7. def.
c 19. p.

23. 9.

PROP. XXIIII.

Si pluſieurs impairs compoſent vn ſeul nombre, & que leur multitude ſoit impaire; le total eſt impair.

Que les nombres impairs en multitude impaire AB, BC, CE, compoſent le nombre AE. Ie dis que ce compoſé eſt impair. Car ſi[d] de l'impair CE, on ote l'vnité, le reſte CD, ſera pair. Or[e] le nom-

A...B.....C.....D.E

d 7. def.
e 23. p.

bre AC, composé d'impairs en multitude paire, est pair: donc luy adioutant le pair CD, le *a* nombre AD, sera pair. Et par consequent AE, sera *b* impair.

a 19. p.
b 7. def.

COROL.

29
30. 9.

Si vn impair multiplie vn impair, le produit sera impair. Car l'vn des impairs sera contenu au produit autant de fois qu'il y a d'vnitez en l'autre, c'est à dire, en multitude impaire: & partant le produit sera impair par cete proposition.

DEVZIEME PARTIE DE L'INTRODVCTION.

DE L'ORIGINE ET DE LA NATVRE DES QVANTITEZ incomensurables en general.

PREFACE POVR CEVS QVI ONT deja quelque conoissance de cete matiere.

LA doctrine des Incomensurables est facile & intelligible, & neanmoins est compriſe de ſi peu de perſones, qu'il ſemble n'y auoir rien de plus obſcur dans toutes les Matematiques. Iuſques là que pluſieurs Auteurs ont ignoré l'origine des grandeurs incomenſurables, & que la pluſ-part n'ayant pas doné la vraye definition des nombres Irrationaus, on peut croire qu'ils ne l'ont pas ſeulement conuë. Que Steuin s'y ſoit trompé, on ne s'en doit pas étoner; car puiſqu'il n'a iamais ſeu ce que c'eſtoit que Nombre (come ie l'ay fait voir dans la premiere queſtion Aritmetique) encores que ce ſoit vne choſe naturelle, il n'eſt pas fort étrange qu'il ait ſi mal raiſoné ſur ce qui eſt vn peu plus éloigné de notre conoiſſance. Mais que de grans eſprits s'y ſoient mépris come luy, & que d'autres s'y mécontent encores tous les iours, c'eſt ce que ie ne puis bonement conceuoir, la choſe n'eſtant pas ſi embroüillee, qu'elle leur deut eſtre matiere d'erreur. Et premierement, pour parler de l'origine de ces quantitez, elle eſt expliquée ſi clairement dans le 10e. liure des Elemens, qu'Euclide ne laiſſe aucun ſujet de douter, nous inſtruiſant ſi plenement d'où les premiers Geometres en ont

tiré

tiré la conoissance, qu'il n'est pas besoin d'en rechercher vn autre principe. Car lors qu'en la 9e. proposition, ou selon l'ancien ordre en l'onziéme (laquelle est le fondement de tout le liure) il enseigne le moyen de trouuer par les Elemens Geometriques & Aritmetiques demontrés dans les liures precedens; des lignes droites incomensurables à toute ligne droite proposée: ne montre-t'il pas assez, que toute cete doctrine depend purement de la Geometrie, & de l'Aritmetique ordinaire: & qu'il n'est nulement neceſſaire d'auoir recours aus nombres apelez sours & irrationaus? D'ailleurs Montaureüs, Clauius, & tant d'autres n'ont-ils pas expliqué tout le liure sans se seruir aucunement des nombres irrationaus dans leurs demonstrations? Et si quelques vns ont pris plaisir de les y apliquer à la fin de chaque proposition, il ne s'ensuit pas qu'ils y soient neceſſaires, & qu'on ne s'en puisse entierement passer. Aussi est il certain que ceus qui disent que les nombres irrationaus sont premiers en conoissance, ne nient pas que toutes les propositions de cete matiere, ne se puissent demontrer sans leur secours, mais ils s'imaginent que ce sont les nombres irrationaus, qui ont doné à conoitre les grandeurs incomensurables, & qu'on a formé les demonstrations de ces grandeurs, sur le modele de celles des nombres, lesquels on a depuis suprimez, à cause qu'on les tenoit pour irrationaus & inexplicables. Et c'est, disent ils, ce qui en a si fort obscurcy le discours, parce que les nombres auoient esté vne guide assurée pour comprendre parfaitement les proprietez des incomensurables; & que sans eus on ne peut rien efectuer de ce qui les concerne. Voila ce que Steuin dit de la conoissance des incomensurables; mais come il s'est contenté de le dire sans le prouuer que fort legerement, on ne s'étonera pas si ie prens la liberté de le dédire, ne pouuant pas me resoudre à le croire si facilement, de mesme que ie ne pense pas que luy ny ses sectateurs vouluſſent doner creance à mes paroles, si i'aleguois quelque chose de gayeté de cœur, sans l'apuyer de bones & solides raisons. Et mesme bien loin de souscrire à leur opinion, ie pretens leur prouuer, que tant s'en faut qu'on soit venu en conoissance des grandeurs incomensurables, par les

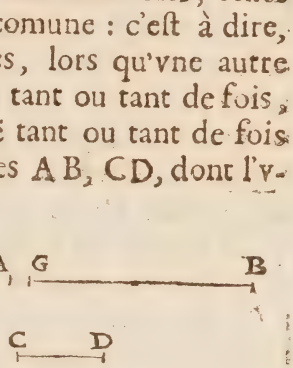
nombres irrationaus, qu'au contraire les grandeurs incomenſurables ont ſeruy à inuenter les termes de ces nombres, qui ſans les grandeurs, ſeroient entierement invtiles. Ie dis, inuenter, car les nombres irrationaus ne ſont pas conus naturelement; & ie défie le plus excelent eſprit du monde, de me dire par lumiere naturele, ce que c'eſt que R/2. R/10. & tels autres nombres, au lieu que les plus groſſiers ſauront ſans aucune étude, ce que c'eſt que 3. 4. 6. &c. Mais deuant que de venir à la preuue de mon dire, ie demanderois volontiers à Steuin ou à ſes ſectateurs, quel beſoin il eſtoit de deuiner en vne choſe qui eſt ſi claire d'elle meſme. Pourquoy veut on ſe perſuader, que les propoſitions des grandeurs incomenſurables, qui ſont toutes demontrées ſans les nombres ſours, ayent eſté formées ſur ces nombres, puiſqu'il n'y en a aucune conjecture, & qu'il y a bien plus de raiſon de croire, que ces nombres, qui come nous auons dit, ſont naturelement inconus, ayent eſté formez ſur les grandeurs, dont les demonſtrations ſont independantes de celles de ces nombres? D'ailleurs quand l'opinion de Steuin ſeroit vraye, ie luy demanderois encores, d'où on auroit tiré les nombres ſours, & qui auroit doné lieu de les imaginer: ne me répondra t'il pas, que c'eſt pour exprimer des grandeurs? car à ſon dire les nombres ne ſont que les expreſſions[a] de la quantité des choſes. S'ils ſont pour exprimer les grandeurs, ils ſont donc poſterieurs aus grandeurs, & c'eſt par les grandeurs qu'on les a formez, come toute image eſt poſterieure à la choſe repreſentée. Mais pour proceder par ordre en cete diſpute, & ne nous pas engager à parler d'vne matiere, deuant que d'en auoir definy les termes, voyons premierement ce que c'eſt que comenſurable & incomenſurable, pour prouuer en ſuite qu'il ſe trouue de ces ſortes de grandeurs.

[a] 1. def. Ar. Si.

La premiere & vraye origine des incomensurables.

CHAPITRE I.

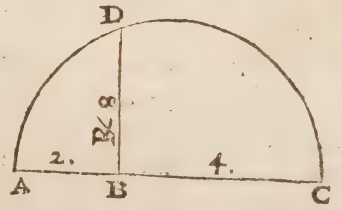
EVCLIDE definit les grandeurs comensurables, celles qui sont mesurées d'vne mesure comune : c'est à dire, que des grandeurs sont comensurables, lors qu'vne autre grandeur de leur espece, estant repetée tant ou tant de fois, les egalera, ou bien qu'elle est contenuë tant ou tant de fois en chacune d'elles. Telles sont les lignes A B, C D, dont l'vne contient 12. des mesmes parties desquelles l'autre en contient 4. Et ainsi la ligne A G, estant la 12e. partie d'A B, ou la 4e. de C D, est la comune mesure de toutes les deus.



En suite de cela les grandeurs incomensurables sont definies, celles qui n'ont aucune mesure comune; c'est à dire, qui sont telles qu'il n'y a aucune grandeur de leur espece quelle qu'elle puisse estre, qui soit contenuë exactement en l'vne & en l'autre. Mais parce qu'il est assez dificile de conceuoir, qu'il se trouue des grandeurs de cete nature, voyons de quelle sorte on a découuert qu'il y en pouuoit auoir, & ce qui en a doné la premiere conoissance.

Ie dis donc que les Geometres considerans qu'il estoit possible [a] de trouuer vne ligne moyene proportionele entre deus lignes droites donées, quelles qu'elles fussent, se sont trouuez insensiblement dans l'incomensurabilité. Car si on prend par exemple les lignes A B, B C, la premiere desquelles soit supoſée longue de deus piés, sauoir A B, & l'autre B C, de 4. & qu'on [b] trouue leur moyene proportionele B D; ie dis que cete derniere ligne est incomensurable à la ligne A B.

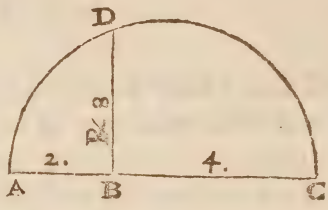
[a] 13. 6.



[b] 13. 6.

Car puisqu'A B, B D, B C, sont proportioneles, le quaré

a Cor. 20. 6. d'AB, aura meſme proportion au quaré de BD, que la ligne AB, à la ligne BC. Or la ligne AB, eſt 2. de telles parties dont BC, en eſt 4. par l'hipoteſe: donc le quaré d'AB, ſera au quaré de BD, come 2. à 4. c'eſt à dire que le quaré de BD, eſt double du quaré d'AB. Et partant le quaré d'AB, eſtant 4. piés quarez, puis qu'AB, eſt 2. piés en longueur, le quaré de BD, enſera neceſſairement 8. qui eſt le double de 4. Si donc on demande maintenant quelle eſt la proportion d'AB, à BD: ie dis qu'elle ne ſe peut exprimer par aucuns nombres: & qu'au regard de la ligne AB, poſée 2. la ligne BD, ne peut eſtre quelque nombre que ce ſoit, parce que ſon quaré eſtant 8. il faudroit pour la deſigner vn nombre qui par ſa propre multiplication produiſit 8. Or il n'y a aucun nombre qui multiplié par ſoy-meſme produiſe 8. come nous prouuerons puis apres: donc la ligne BD, ne peut eſtre exprimée par aucun nombre. Et partant la ligne AB, qui eſt la moindre, ne ſera ny partie ny pluſieurs parties de la plus grande BD; car ſi AB eſtoit partie ou parties de BD, elles b auroient l'vne à l'autre meſme proportion, qu'vn nombre à vn autre nombre: & par conſequent AB, eſtant le nombre 2. BD, ſeroit auſſi quelque autre nombre, ce qui a eſté demontré impoſſible. Donc puiſque la moindre grandeur AB, n'eſt ny partie ny pluſieurs parties de la grandeur BD, les grandeurs AB, BD, ſont incomenſurables, car ſi elles eſtoient comenſurables, la moindre ſeroit partie ou pluſieurs parties de la plus grande par la premiere propoſition de notre 10. liure, laquele ſe peut bien citer icy, puiſqu'elle ne depend d'aucune autre.



b 15. def. 5.

Or qu'il n'y ait aucun nombre quel qu'il ſoit, qui multiplié par ſoy meſme produiſe 8. nous le prouuerons en cete ſorte. Premierement ce ne peut eſtre aucun nombre entier, car ce deuroit eſtre beaucoup plus de 2. puiſque le quaré de 2. eſt 4; mais moins de 3. le quaré de 3. eſtant 9. & partant il faut que ce ſoit vn moyen entre 2. & 3. ce qui ne ſe peut

trouuer sans diuiser l'vnité, laquele peut bien soufrir icy la diuision, puisque les termes numeraus sont apliquez à la quantité continuë. Mais ie dis qu'aucun nombre ny rompu ny composé d'entier & de rompu, ne peut produire par sa propre multiplication, ny le nombre 8. ny quelque autre nombre entier que ce puisse estre. Car que ce soit premierement la fraction B D, s'il est possible. Or puisque B D est vne fraction, le numerateur B, sera moindre que le denominateur D (autrement ce ne seroit pas vne fraction seule, mais vn nombre composé d'vnitez & de fraction) & partant au quaré de la fraction B D, le quaré du numerateur B, sera moindre que celuy du denominateur D; & ainsi le quaré de la fraction B D, sera encores vne fraction puisque le numerateur ne poura estre diuisé par le denominateur.

B $\frac{3}{4}$ D C 2 $\frac{4}{5}$

F $\frac{14}{5}$ G H $\frac{196}{25}$ I

Que le nombre C, composé de nombre entier & de fraction, soit maintenant supposé produire 8. ou quelque autre nombre entier, par sa propre multiplication. Ayant mis en vne seule fraction le nombre C, & pris les moindres termes de cete fraction F, G, si on prend leurs quarez H, I, (le tout selon les preceptes de l'Aritmetique pratique) la fraction H I, sera le quaré d'F G, c'est à dire du nombre C. Ie dis que la fraction H I, ne peut estre reduite en nombre entier. Car puisque les nombres F, G, sont les moindres termes de leur proportion, ils sont [a] premiers entre eus, & partant leurs [b] quarez H, I, sont aussi premiers entre eus, & par consequent le denominateur I, ne mesurera pas le numerateur H; car s'il le mesuroit, ils ne seroient pas premiers entre eus; donc le numerateur estant diuisé par le denominateur, le quotient ne sera pas nombre entier; car s'il estoit nombre entier, le denominateur [c] mesureroit le numerateur par ce quotient (parce que multipliant le quotient il produit le numerateur) ce qui est absurde, puisqu'ils ont esté demontrés premiers entre eus. Et ainsi la fraction HI, ne sera pas egale au nombre 8. ny à quelque autre nombre entier que ce puisse estre.

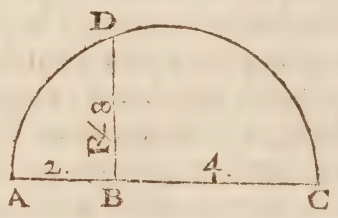
[a] 5. p. Ar.
[b] 10. p. Ar.
[c] 3. ax. Ar.

On ptouuera de la meſme ſorte, que tout nombre entier, qui n'a pas pour racine quarée, aucun nombre entier, n'a pas non plus, ny aucune fraction, ny aucun nombre compoſé d'unitez & de fraction pour racine quarée.

Premiere origine des nombres irrationaus.

CHAP. II.

LES Geometres ayant reconu par le moyen que ie viens d'expliquer, qu'il y auoit des lignes incomenſurables, & qu'au regard de celle qui ſeroit expliquée par vn nombre, il ne ſe pouuoit trouuer aucun nombre qui exprimât les autres ; conſiderans d'ailleurs, qu'il eut eſté fort incomode en parlant de la ligne B D, de notre derniere figure, & d'autres ſemblables, de dire que c'eſt vne ligne, dont le quaré eſt double du quaré de la propoſée A B; ont inuenté des termes numeraus pour les deſigner plus facilement, & cela ſuiuant la nature de leurs quarez, qui ſont, come il ſe voit en cet exemple, premierement conus en nombres que les lignes meſmes. Ainſi voyans que le quaré de B D, ou de quelque autre moyene proportionele entre deus lignes de proportion couble, eſtoit 8. ſi la moindre des extremes eſtoit poſée 2; ils ont iugé à propos de nomer B D, racine quarée de 8. ou ſimplement racine de 8. c'eſt à dire ligne droite dont le quaré eſt 8. en l'exprimant par ce caractere ℞8, pour doner à entendre que le quaré de B D, contient 8. des meſmes parties dont le quaré d'vne autre ligne priſe d'abord, en contient tel ou tel nombre quaré, tel qu'eſt icy A B, dont le quaré eſt exprimé par le nombre quaré 4. ou B C, dont le quaré contient 16. des meſmes parties.

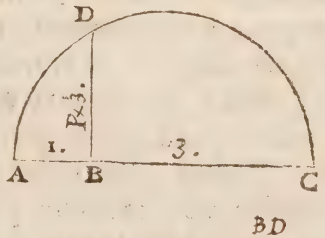


Ces ſortes de nombres ℞8. & autres ſemblables ſont apelez

irrationaus, ou ſours, c'eſt à dire inexplicables, parce qu'ils ne ſe peuuent exprimer de meſme que les autres, qui s'expliquent par des noms qui leur ſont propres, & non par leurs quarez: & à leur egard on apele les autres nombres ordinaires, Rationaus & Aritmetiques. Nous expliquerons plus au long dans les definitions de notre 10e. liure, les termes de Rationel & d'Irrationel, leſquels ſe donent auſſi à pluſieurs lignes & ſuperficies.

Par la meſme metode, dont nous nous ſomes ſeruis pour trouuer la ligne B D, incomenſurable à la ligne A B; on peut en trouuer vne infinité d'autres incomenſurables, tant à la propoſée A B, qu'à quelque autre que ce ſoit, & leur impoſer des noms numeraus ſuiuant la nature de leurs quarez. Et parce que les lignes AB, BC, ſont en proportion ſouſdouble, & qu'on les peut imaginer diuiſées en tels nombres de parties qu'on voudra, pourueu que la meſme proportion ſoit gardée; ſi A B, eſt poſée 3. B C, ſera 6. & on trouuera lors que B D, ſera ℞18. c'eſt à dire que ſon quaré ſera 18. come eſtant double du quaré d'A B, lequel ſera 9. par cete ſupoſition. Et ſi A B, eſtoit poſée 1. B D, ſeroit par cete raiſon ℞2.

Que ſi on prend des nombres en proportion triple, ſextuple, ſeptuple, & en telle autre proportion que l'on voudra, dont les denominateurs n'ayent pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, come en cete figure les lignes C B, B A, qui ſont en proportion triple, & qu'on trouue leur moyene proportionele B D, les quarez d'A B, B D, [a] ſeront encores en meſme proportion qu'A B, à B C, c'eſt à dire que 1. à 3: & parce que le quaré d'A B, eſt 1. celuy de B D, ſera 3. des meſmes parties, lequel nombre 3. n'eſtant pas quaré, la ligne B D, ne poura eſtre deſignée par nombre qu'en diſant que c'eſt ℞3. Et ſi B C, eſtoit quintuple ou ſextuple de B A; B D, ſeroit par meſme raiſon ℞5. ou ℞6. & ainſi des autres, leur impoſant touiours des noms ſelon la nature de leurs quarez.

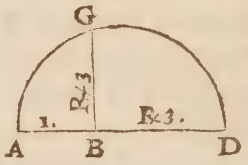


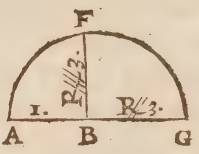
[a] Cor. 20. 6.

Or iuſques icy on voit en tous ces exemples, que les quarez

des moyenes proportioneles, s'expriment par des nombres ordinaires ou Aritmetiques, & partant ſont comenſurables au quaré de la premiere ligne propoſée, come au dernier exemple le quaré de B D, eſt 3. des meſmes parties ſuperficieles dont celuy d'A B, eſt 1. Mais ſi on prend maintenant des moyenes proportioneles entre la ligne premiere poſée, & les moyenes proportioneles trouuées de la ſorte, c'eſt à dire entre les lignes A B, B D, de la derniere figure; on aura des lignes dont les quarez ſeront incomenſurables. Car ſi cete moyene proportionele eſt B G, le[a] quaré d'A B, ſera au quaré de B G, come A B, à B D, c'eſt à dire come 1. à ℞3. car B D, en la figure precedente a eſté trouuée ℞3. & partant le quaré d'A B, eſtant touiours 1. celuy de B G, ſera ℞3. Et parce qu'il euſt eſté incomode, pour deſigner B G, de dire que c'eſt vne ligne dont le quaré eſt ℞3 : les Geometres ont trouué bon de la nomer Racine de Racine de 3. ou Racine quaré-quarée de 3. & de luy doner ce caractere ℞qq 3. ou cet autre dont nous nous ſeruirons, come plus comode & plus abregé qu'aucun autre, ℞/3. pour doner à entendre que ſon quaré eſt ℞3. de meſmes parties dont celuy de la propoſée eſt 1: & ainſi les quarez d'A B, B G, dont la proportion ne ſe peut deſigner par des nombres ordinaires, ſont incomenſurables. Et ſi on prend encores vne moyene proportionele entre A B, B G, laquele ſoit B F, on trouuera par la meſme raiſon, qu'elle ſera ℞/3. c'eſt à dire Racine quaré-quaré-quarée de 3. & ainſi à l'infiny, puiſqu'on poura touiours prendre vne moyene proportionele entre quelques lignes propoſées que ce ſoit.

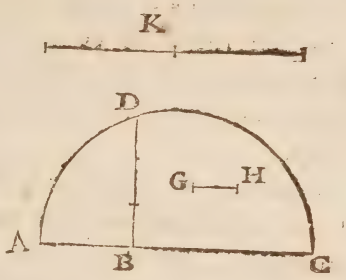
[a] 8. 20. 6.





I'ay dit en parlant de ces moyenes proportioneles, qu'il n'y auoit point de nombres pour les exprimer, au regard de la propoſée, parce que ce n'eſt qu'à ſon reſpect ſeulement qu'elles ne peuuent eſtre exprimées par nombres, & que ne luy eſtans pas comparées, il y a vne infinité d'autres lignes, au regard

regard desqueles elles le pouront estre, come toutes celles qui en seront multiples, ou qui seront egales à vne ou plusieurs de leurs parties aliquotes. Car si on diuise par exemple la ligne BD, de la premiere figure, en trois parties egales, & qu'on prene la ligne GH, egale à l'vne de ces parties, la mesme ligne BD, qui à l'egard de BA, ne peut estre expliquée par aucun nombre, le poura estre estant comparée à GH, car elle sera 3. des mesmes parties, dont GH, est 1. ou bien BD, sera 6. des mesmes parties dont GH, sera 2. De mesme si on prend K, double de BD; la mesme BD, sera 1. des mesmes parties dont K, est 2: ou bien 2. de celles dont K est 4.



Voila la vraye origine de la conoissance des incomensurables, & de l'inuention des nombres irrationaus qui les signifient; & nous pourions de la mesme sorte parler des solides incomensurables, & de leurs nombres: mais Euclide n'en ayant point traité dans son 10e. liure, come n'ayant pas enseigné l'inuention des deus moyenes proportioneles entre deus lignes donées, laquele est neceſſaire pour la constitution des solides semblables; nous nous contenterons d'en dire vn mot à la fin du liure seulement, sans y toucher en cete Introduction.

Et pour faire d'autant mieux conoitre la verité de ce discours, & que les termes des nombres irrationaus, ne sont que pour designer plus comodement les grandeurs incomensurables, il ne faut que considerer, que sans les grandeurs ils seroient invtiles & inconus; & mesmes qu'il eut esté impossible de les inuenter, s'il n'y auoit point de grandeurs en la nature.

Qu'ils fussent invtiles, on ne le peut nier, puisqu'ils ne seruent pas à designer des multitudes d'vnitez, c'est à dire de vrais nombres, mais seulement des grandeurs; car on ne peut pas dire d'aucun nombre d'homes ou d'Anges, qu'il soit

R/30. ny R/45. puisque l'vnité ne s'y diuise point, & neanmoins il est certain que R/30. est beaucoup plus que 5. puisque le quaré de 5. est 25. mais que c'est aussi moins de 6. puisque son quaré est 36. ce qui est absurde, car entre 5. & 6. Anges il n'y a point de milieu,

Or en suite de ce que ces nombres eussent esté invtiles, ils auroient esté necessairement inconus, puisqu'on ne se fut iamais auisé de les inuenter, come n'estans bons à aucun vsage.

D'ailleurs il n'eut pas esté non plus possible de les inuenter, puisque n'ayans autre conoissance que des nombres ordinaires, qui sont tous comensurables, l'vnité les mesurant tous; nous ne fussions iamais tombez dans l'incomensurabilité. Et partant il faut conclure, que c'est la Geometrie, qui par le moyen du raisonement que ie viens d'expliquer, nous a fait conoitre, qu'il pouuoit y auoir des grandeurs incomensurables, & non pas l'Aritmetique, puisqu'elle n'en estoit pas capable, sans sortir des termes de son objet.

Mais on me dira qu'il n'estoit pas besoin d'auoir recours aus grandeurs, pour inuenter ces nombres; & que l'on pouuoit par les seules demonstrations Aritmetiques, en aquerir la conoissance: car puisque trois nombres estans proportionaus,
17.6. si on multiplie les extremes l'vn par l'autre, le produit est egal au quaré de celuy du milieu; deus nombres estans proposez si on multiplie l'vn par l'autre, & que l'on done au produit, le signe radical, s'il n'a point de racine quarée, on formera vn nombre irrationel: par exemple, si les nombres donez sont 6. & 5. en les multipliant, leur produit sera 30. & partant si l'on met au deuant de ce nombre le signe R/. on aura le nombre R/30. moyen proportionel entre les deus donez: & par la mesme metode s'en formeront vne infinité d'autres sans le secours de la Geometrie, d'où il faut conclure que les nombres irrationaus ne dependent point des grandeurs, & qu'ils ont esté inuentez sans elles. A quoy ie répons, que l'vnité estant indiuisible, il estoit impossible sans sortir des bornes du nombre, & sans apliquer les termes numeraus à la quantité continuë, de venir en conoissance de R/30. ny

d'autres ſemblables, dans leſquels i'ay fait voir que l'vnité eſtoit diuiſée, & qu'en cet exemple 230. eſtoit plus de 5. & moins de 6. Auſſi l'Aritmetique n'enſegne t'elle pas à trouuer vn nombre moyen proportionel entre deus nombres donez, come la Geometrie demontre qu'on peut trouuer vne moyene proportionele entre deus lignes donées quelles qu'elles ſoient: que ſi cela ſe fait, ce n'eſt qu'à l'imitation de la Geometrie, lors que par les termes numeraus on deſigne des grandeurs. Et ainſi les nombres ſours ſont poſterieurs aus grandeurs irrationeles.

Que les nombres irrationaus ne ſont que des grandeurs.

CHAP. III.

DE tout ce que nous venons de dire, on peut inferer que ces nombres irrationaus ne ſont pas proprement des nombres, mais ſeulement par equiuoque, à cauſe que leurs termes aprochent de ceus des nombres; & par analogie, à cauſe de quelques proprietez qui leur ſont comunes auec les nombres: de meſme que le Chien celeſte ne ſe peut pas dire Chien ſimplement, mais ſeulement Chien celeſte, ~~par~~ pour quelque raport qu'il y a entre la nature de cet Aſtre & celle de cet animal, qui eſt cauſe qu'on leur a doné meſme nom: & qu'eſtant impoſſible de conceuoir le nombre irrationel autrement qu'en quelques grandeurs, ces nombres ne ſont en efet autre choſe que des grandeurs meſmes dont ils ne ſont pas reelement diſtinguez. Et c'eſt pour cete raiſon qu'ils ſont apelez nombres Geometriques, come qui diroit nombres-grandeurs, eſtans par attribution de l'obiet de la Geometrie, & ne pouuans eſtre ſeparez des grandeurs que par imagination.

Steuin meſmes, chez qui le nombre eſt ce qui explique la quantité de chaque choſe (qui eſt vne definition que nous auons rejetée) & qui par conſequent tient que le nombre irrationel eſt vne vraye eſpece de nombre, ne peut s'empeſcher d'auoüer que les nombres ſours ne ſont que des gran-

deurs, disant qu'il montrera aussi legitimement ℞ 8. sur vne aune, come $\frac{1}{4}$, en prenant vne moyene proportionele entre vne aune & sa 8e. partie; par où il done assez à entendre que ces nombres ne se peuuent exhiber que dans les grandeurs, puisqu'il n'alegue cela que pour répondre à ce qu'on luy obiecte, qu'on ne peut montrer ce que c'est que ℞8.

Il s'eforce neanmoins en quelque autre endroit de prouuer que ℞ 8. est vn nombre par ce bel argument. La partie, dit-il, est de mesme matiere que son entier: ℞8. est partie de son quaré 8. qui est vn nombre; donc ℞ 8. est vn nombre. Si Steuin eut eu bone memoire, & se fut souuenu de n'auoir peu luy mesme montrer ℞8. qu'en grandeur, il n'eut pas laissé échaper de son esprit vne impertinence, qui est indigne d'vn Geometre de trois jours, telle qu'est la mineure de son argument, que ℞8. est partie de son quaré 8. Car puisque ℞8. est vne ligne droite selon luy-mesme, son quaré est vne superficie quarée, & partant ℞8. n'est pas sa partie, puisque la ligne & la superficie sont quantitez heterogenées, qui n'ont aucune proportion l'vne à l'autre, & ne peuuent estre parties l'vne de l'autre. Ce qui a trompé Steuin est l'étenduë du terme numeral, lequel peut signifier indiferemment le nombre, c'est à dire vne multitude d'vnitez, & les parties de la quantité continuë; de façon que prenant d'vn coté 8. pour vn nombre Aritmetique, ou multitude d'vnitez; & d'autre part voyant qu'vn quaré Geometrique peut estre 8. c'est à dire egal à 8. mesures quarées, il atribuë ℞8. pour racine au nombre 8. & de là il s'est imaginé que ℞8. estoit vn nombre, sur ce que les racines sont touiours parties de leurs quarez (come 3. est le tiers de son quaré 9.) & que partant ℞ 8. deuoit estre partie du nombre 8. & par consequent nombre. Ce qui est extremement absurde, puisque ℞8. n'est pas racine du nombre 8. & lors que 8. sera pris pour vne multitude d'vnitez, il sera impossible de rien conceuoir qui soit sa racine, mais ℞ 8. est seulement coté d'vn quaré Geometrique equiualent à 8. mesures quarées: & ainsi il est faus que ℞8. soit partie de son quaré 8.

Refutation de l'opinion de Steuin touchant l'origine des incomensurables.

CHAP. IIII.

IE ne pense pas qu'apres tout ce que ie viens de dire, on puisse douter en aucune façon de l'origine des incomensurables; & m'asseure que Steuin n'eut pas esté d'opinion contraire à la notre, s'il eut consideré toutes ces raisons; mais il y a bien de l'aparence qu'elles luy ont esté inconuës, puis qu'il les passe sous silence, & ne se met pas en pene d'y répondre, quoy qu'il l'eut deu faire pour établir son opinion s'il les eut seuës. Voyons maintenant quelles sont les sienes, pour prouuer que les nombres irrationaus ont doné conoissance des grandeurs incomensurables, & qu'ils sont les premiers conus.

Il dit donc en la preface de l'origine de cete conoissance, que come beaucoup de Teoremes de nombres se décriuent par les grandeurs, qui seroient impossibles par les simples nombres, aussi se trouue t'il souuent que beaucoup de propositions des grandeurs n'auroient pû estre inuentées par les seules grandeurs, sans le secours des nombres (ie ne m'amuse à raporter ses paroles mesmes, parce qu'elles sont fort rudes, vn Flaman s'estant meslé de parler François.) Par exemple, dit-il, nous sauons que 1. est incomensurable à ☒2. mais come 1. à ☒2. ainsi le coté d'vn quaré à sa diagonale: donc le coté du quaré est incomensurable à sa diagonale. Et partant come il y a des nombres incomensurables entre eus, &c. Où l'on voit que tout son fondement n'est autre chose sinon que nous sauons que 1. est incomensurable à ☒2. Mais ie luy demande qui luy a donc apris, non pas que 1. est incomensurable à ☒2. mais mesmes ce que c'est que ☒2. & qu'il y ait aucune quantité qui soit ☒2. si ce n'est le raisonement Geometrique dont i'ay déja parlé, en suite duquel i'ay fait voir, que ces nombres seroient inconus sans les grandeurs. Ce qui estant ainsi, il est tres faus que nous sachions sans les grandeurs que 1. est incomensurable à ☒2. &

à tous nombres semblables, puisque l'origine de ces nombres depend des grandeurs, ou pour mieux dire, ce ne sont que des grandeurs mesmes. Il n'est pas vray non plus que nous ne conoissions que par les nombres sours, que le coté d'vn quaré soit incomensurable à sa diagonale, puis qu'Euclide & ses interpretes le demonstrent assés en la derniere du 10me. sans se seruir que des nombres ordinaires, ce que nous ferons aussi sur la 7e ou 9e prop. du mesme liure.

Ce que dit Steuin des simples lignes, il l'étend aussi aus composées, disant que sur les douze especes de nombres composés apelés Binomes, on a formé les douze especes de lignes[a] Binomiales, qui sont, dit-il, inseparables des nombres, parce qu'vne ligne n'est Binomiale, que par atribution du nombre, se pouuant faire qu'vne mesme ligne, qui dans vne vile sera Binomiale, dans vne autre soit explicable par vn nombre Aritmetique; & que partant ce n'est que l'atribution du nombre expliquant sa quantité, qui la rend telle. Or tout ce que nous auons dit des lignes simples se doit aussi entendre des composées, & partant nous nions que les douze lignes Binomiales, ayent esté formées sur les 12. nombres Binomiaus, puis qu'aucontraire les noms des nombres Binomiaus n'ont esté inuentés que pour exprimer plus facilement les lignes Binomiales. Il n'est pas vray non plus que les lignes ne soient Binomiales, que par atribution de nombre puis qu'elles sont telles d'elles mesmes, & de leur nature, estans formées sur la mesure de quelque autre sans aucune consideration de nombre irrationel, come il sera aisé de le conoitre en la 43. prop. & aus 5. suiuantes. Et bien qu'vne ligne puisse estre expliquée par vn nombre irrationel dans vne vile, qui dans vne autre le poura estre par vn nombre ordinaire, ce n'est pas à dire que ce soit le nombre qui la rende rationele ou irrationele, mais seulement la proportion qu'elle aura auec quelque autre ligne qu'on se sera propose, come ie l'ay déja remarqué: si bien qu'estant comparée auec d'autres lignes que celle là, il s'en poura trouuer vne infinité d'autres à qui elle sera comensurable, auquel cas les denominations de R10. R3. &c. ne luy conuiendront plus; & la mesme ligne qui au regard de quelqu'vne est R8. sera par

[a] Ce sont des lignes dõt nous comencerons à parler en la 33. prop. du 10. liure.

la seule comparaison auec vne autre, 2. 3. &c. & non par la seule atribution des nombres, puis qu'ils ne luy conuienent qu'en suite de ces comparaisons.

Que les nombres Geometriques sont auec raison apelés sours & irrationaus.

CHAP. V.

STeuin se persuadant que les nombres Geometriques sont aussi parfaitement nombres, que les autres, & qu'ils constituent vne vraye espece de nombre, ne trouue pas bon qu'on les apele irrationaus, absurdes, sours, irreguliers, inexplicables. Deuant que de passer outre, ie luy diray premierement que ie ne pense pas que personne les ayt apelés irreguliers, parce qu'ils ne le sont pas, & que leurs regles sont tres certaines & asseurées; & quoy qu'on ne les nome gueres absurdes non plus, neanmoins demeurant d'acord de ce mot, par ce qu'il n'est gueres diferent de celuy d'irrationel; ie luy répons, afin qu'il ne se mete pas en colere contre des noms, que les termes d'absurde, d'irrationel, & d'inexplicable, veulent dire simplement, qu'on ne peut pas bien expliquer ce qu'ils sont: & celuy de sourd, qu'ils ne se font pas bien entendre, qui est en efet vne meſme chose. Aussi est il certain qu'ils ne se peuuent pas bien exprimer: en ce que pour en venir à bout il faut vser de circonlocution, au lieu que les noms des nombres ordinaires disent netement ce qu'ils sont. Par exemple, il est certain que par ce terme ℞12. on veut designer vn nombre qui soit plus de 3. & moins de 4. puis qu'estant multiplié par soy meſme il produit 12. & que le quaré de 3. est 9. & celuy de 4. est 16. Et parce qu'il n'y a aucun nombre, ny entier, ny rompu, quel qu'il soit, qui puisse produire 12. estant multiplié par soy meſme, & que partant on ne peut pas bien expliquer ce que c'est, que par perifrase, en disant que c'est ℞12. on a eu raison d'apeler ces nombres, inexplicables, come n'estans pas nombres à proprement parler. De dire, qu'on designe assés ce qu'ils sont en *Chap. 1.*

disant que c'est ℞12. ℞6. ℞15. &c. cela ne se peut; parce qu'encores que ce soit en efet vne proprieté de ℞12. de produire 12. cela neanmoins n'est pas assez dire, puisque ℞12. a en soy quelque chose qui luy est plus propre, & luy conuient premierement que de produire 12: de mesme que si ie disois le pere d'Alexandre, il est certain que i'exprimerois en quelque façon, celuy dont ie voudrois parler, mais aussi que ie pourois bien m'expliquer mieus, puisque celuy que ie veus dire a quelque chose de plus propre, & qui le peut mieus designer, qu'en disant que c'est le pere d'Alexandre, qui est d'estre Filipe de Macedoine, au lieu que d'estre pere d'Alexandre, ce n'est en luy qu'vne relation accidentele. Et sans chercher des exemples hors des nombres, de mesme que ℞16. a bien cete proprieté de produire 16. par sa multiplication, mais est plus proprement 4. que ℞16. ainsi ℞12. a quelque chose en soy autre, que d'estre coté de 12. mais il est impossible de l'exprimer. Et cecy confirme entierement ce que i'ay dit auparauant, que ces nombres irrationaus ne sont proprement & en efet que des grandeurs, & qu'ils ne sont nombres que de nom; & par equiuoque; puis qu'il n'y a aucune multitude d'vnités où ils se puissent trouuer, mais bien des grandeurs, car on trouuera des lignes, des plans, & des solides qui seront precisement chacun en son espece ℞20. ℞12. ℞40. &c. & feront voir de combien ℞12. excede 3. & de combien il est moindre que 4.

Apres auoir montré pourquoy les nombres Geometriques sont apelés irationaus & inexplicables, il faut voir ce qu'alegue Steuin pour prouuer son opinion. *Les nombres Geometriques ne doiuent pas, dit-il, estre estimés irrationaus, ou absurdes pour estre incomensurables aus Aritmetiques, parce que l'incomensurabilité ne cause pas absurdité des termes incomensurables, puisque la ligne & la superficie pour estre incommensurables, ne sont pas neanmoins absurdes ny inexplicables: & pour le faire voir en des quantitez homogenées, c'est que le coté d'vn quaré & sa diagonale estans abstrais ou separez des nombres, ne sont pas lignes absurdes*

ou irrationeles; en fin que si l'incomensurabilité causoit absurdité à l'vne des quantitez comparées ensemble, le nombre Aritmetique seroit autant coupable que le Geometrique, de mesme que la Sfere & le cube sont egalement cause de la dissemblãce qu'il y a entre eus, & non pas plus l'vn que l'autre. Ie pourois bien m'exenter de répondre à cete obiection, n'ayant pas dit que l'incomensurabilité des termes fut cause de l'absurdité, mais ie ne laisseray pas d'y satisfaire & de dire que Steuin n'a pas pris le mot d'irrationel ou d'absurde selon le sens des Aritmeticiens, & qu'on reconoit aisément par son discours qu'il n'entẽd autre chose par ces mots que (hors de raison) ou (peu conuenable) qui n'est pas la signification que ie leur ay donée en ce chapitre mesme. Que pour les grandeurs heterogenées telles que sont la ligne & la superficie, il ne faut pas s'étoner si elles ne sont pas apelées irrationeles à l'égard l'vne de l'autre, parce que l'irrationalité ne se met qu'entre des grandeurs homogenées, qui ont proportion l'vne à l'autre, & peuuent estre comparées ensemble, telles que ne sont pas la ligne & la superficie. Que pour la diagonale d'vn quaré elle n'est pas irrationele, selon Euclide, ny par attribution de nombre, ny autrement, bien qu'estant comparée au coté du mesme quaré, l'vne des deus ne se puisse exprimer que par vn nombre irrationel: en quoy pourtant il n'y a aucune contradiction, come pretend en suite Steuin, ny chez Euclide ny chez les Aritmeticiens, puisqu'Euclide, sans parler des nombres sours, apele constamment Rationeles, toutes les lignes, dont les quarez sont Rationaus, telles que sont celles qui s'expliquent par ces nombres $\sqrt{7}.\sqrt{3}.$ &c. parce que leurs quarez sont 7. & 3. au lieu que les Aritmeticiens tienent pour irrationaus tous nombres qui ne peuuent estre designez que par leurs quarez, & qui par consequent portent le signe Radical: ce qui est cause qu'vne mesme ligne sera Rationele selon Euclide, & irrationele selon les Aritmeticiens, à cause de diuerses acceptions des mots de Rationel & d'irrationel.

Sur quoy il faut remarquer, qu'encores que les termes des nombres irrationaus designent necessairement des grandeurs,

parce que, come i'ay montré au 3. chap. ces nombres ne ſont que des grandeurs meſmes, neanmoins leur concept eſt vn peu plus vague & plus general que celuy des grandeurs, & leur ſignification plus étendue, car lors que ie conçoy par exemple vne ligne incomenſurable à vne autre ligne, ma penſée eſt renfermée & reſtreinte dans cete eſpece de grandeur qui s'apele ligne, ſans que le meſme concept ſe puiſſe étendre à vne autre eſpece. Mais lors que ie conçoy generalement quelcun de ces nombres R/10. R/3. R/24. ſans les apliquer à aucunes choſes, il eſt certain que chacun de ces nombres peut ſignifier indiferemment toutes les trois eſpeces de grandeurs, & y eſtre apliquez, & que ne diſant autre choſe que R/S. on ne ſait pas ſi i'entens vne ligne, vn plan, ou vn ſolide. Et c'eſt, peut eſtre, pour cete raiſon que les Aritmeticiens tienent pour irrationaus tous les nombres qui portent le premier caractere radical R/. come pouuans eſtre apliquez à des grandeurs irrationeles, ce qui ariue lors qu'ils expriment des plans ou des ſolides, encores que ſelon la doctrine d'Euclide, ils puiſſent eſtre pris pour Rationaus, eſtans apliquez à des lignes droites.

Retournant maintenant à l'obiection, ie nie, come i'ay déja fait, que les lignes irrationeles ne ſoient telles qu'à cauſe du nombre qui leur eſt atribué; & dis qu'vne ligne priſe toute ſeule, ne peut pas eſtre apelée irrationele, encores qu'on luy done vn nombre irrationel, mais ſeulement eſtant comparée auec vne autre ligne.

Enfin il n'y a aucune raiſon de dire, que le nõbre Aritmetique *eſt autant coupable de l'irrationalité, que le Geometrique, de meſme que la Sfere & le cube ſont également cauſe de leur diſſemblance:* parce qu'il y a bien de la diſparité en cete comparaiſon, eſtant certain qu'on ne peut pas atribuer la cauſe de la diſſemblance à la Sfere plutot qu'au cube, puiſque l'vn & l'autre participent egalement leur genre qui eſt le cors ſolide; au lieu que le nombre Geometrique n'eſt pas vne vraye eſpece de nombre, come l'Aritmetique, ainſi que i'ay montré auparauant, ce qui eſt cauſe qu'il y a bien plus d'aparence de doner le nom d'irrationel au Geometrique, qu'à

l'Aritmetique, de meſme qu'il eſt bien plus raiſonable d'apeler vn Ciclope monſtre, qu'vn home qui a deus yeus, & qu'il ſeroit ridicule de dire que l'vn eſt auſſi bien cauſe de la monſtruoſité que l'autre. De plus i'ay déja dit, que le nombre Geometrique eſtoit irrationel pour vne autre raiſon, ſans le comparer au nombre Aritmetique.

En ſuite de cela Steuin fait vne comparaiſon du nombre rompu auec l'irrationel, & montre par pluſieurs conuenances qu'il y a entre eus, que l'vn n'eſt pas plus nombre que l'autre, & que les nombres rompus eſtans neanmoins tenus pour vrais nombres rationaus, il n'y a pas plus de raiſon de nomer irrationaus les Geometriques. Il n'eſtoit pas beſoin de ſe doner tant de pene pour prouuer que le nombre rompu n'eſt pas plus veritablement nombre que le Geometrique, car on ne doit faire aucune dificulté de l'auoüer, puiſque l'vn & l'autre diuiſent l'vnité, & partant ſont des parties de quantité continuë, & ne ſe peuuent trouuer en de vrais nombres, dont l'vnité eſt indiuiſible, mais ſeulement en des grandeurs qui ſe diuiſent come on veut: de façon que toutes les obiections que ſe fait Steuin là deſſus, où il s'imagine de triomfer en y répondant, ne ſont que des monſtres qu'il ſe forge luy-meſme pour les défaire, eſtant certain qu'elles ſont ſi friuoles, qu'vn habile home ne les propoſeroit iamais. Que ſi les nombres rompus ſont eſtimez nombres rationaus, nonobſtant que i'aye dit qu'ils ne ſont pas nombres, c'eſt parce que en efet on les peut expliquer par des nombres ordinaires, & que leur proportion y peut eſtre exprimée, & partant ils ne ſont pas irrationaus, c'eſt à dire inexplicables; car deus lignes ayans proportion entre elles de 2. à $\frac{4}{5}$. on poura dire ſans vſer de fractions, qu'elles ſont en proportion de 10. à 4 : & ſi deus quarez ſont come $\frac{2}{3}$. à $\frac{3}{4}$. on dira qu'ils ont proportion de 8. à 9 : ce qui ne ſe peut pas toujours en nombres irrationaus, mais ſeulement en ceus qui ſont comenſurables, tels que ſont $\sqrt{18}$. & $\sqrt{8}$. qui ont bien proportion de 3. à 2. mais d'autre coté n'ont pas proportion rationele auec des nombres Aritmetiques. Voila la ſeule raiſon qui fait paſſer les fractions ordinaires pour nombres rationaus, leſqueles neanmoins ne ſe peuuent apeler

nombres ſimplement, puiſque ce ne ſont en efet que des parties de continu, & non pas des vnitez.

Steuin adioute, *que cete abſurde opinion, que les nombres Geometriques ne ſont pas vrais nombres, mais nombres irrationaus, a obſcurcy la doctrine des incomenſurables, compriſe dans le 10e. liure d'Euclide, de telle ſorte qu'elle eſt deuenuë en horreur à pluſieurs, iuſques à l'apeler la crois des Matematiciens.* Mais c'eſt à quoy ie ne trouue aucune conſequence, & quelque opinion qu'on puiſſe auoir des nombres Geometriques, ie ne voy pas qu'on en ſoit ny plus ny moins auancé dans la conoiſſance des incomenſurables. Et ie ſeray touiours tres-volontiers de l'opinion de Clauius, qui eſt, que tant s'en faut que la doctrine des nombres irrationaus en general, ſans en apliquer les termes aus grandeurs, ſoit plus facile que le 10e. liure, qu'au contraire elle dépend ſi abſolument de ce liure, qu'elle ne ſe peut comprendre que par ſon moyen, ne pouuant pas me perſuader qu'on puiſſe entendre ce que c'eſt que $4 + \text{R}12$. ny $\text{R}\!\!/\!\!/ 40 - \text{R}\!\!/\!\!/ 10$. ny $\text{R}.(4 + \text{R}3) + \text{R}(4 - \text{R}3.)$ ſans les demonſtrations du 10^e. qui font voir qu'il peut y auoir des lignes qui ſe doiuent exprimer de la ſorte, leſqueles ſont bien, ce me ſemble, de plus facile intelligence, n'eſtans que des lignes ordinaires, que ces nombres auec leurs embaras des ſignes + & — puiſque la ligne droite B, poura par exemple eſtre le dernier nombre $\text{R}(4 + \text{R}3) + \text{R}(4 - \text{R}3)$ lequel eſt ſans doute bien plus obſcur que la ligne B.

B

Que l'opinion de Steuin luy ait fait conoitre vne infinité de choſes qui concernent les incomenſurables, come il veut faire croire: c'eſt de quoy ie ne puis tomber d'acord: ſachant bien que s'il a aquis d'autres conoiſſances des incomenſurables, come entre autres de couper vne ligne en proportion donée, dont les termes ſoient des nombres Geometriques; il n'en eſt redeuable qu'aus demonſtrations d'Euclide qui ſont la ſource de tout ce qui ſe peut dire là-deſſus, & ſont capables de porter vn eſprit ſi auant qu'il voudra,

come estant vne matiere infinie : que son opinion des nombres irrationaus n'y a rien contribué, & qu'on peut bien sans cela couper vne ligne de la façon qu'il dit, sans se seruir que des nombres ordinaires, puisqu'il ne faut que trouuer deus lignes qui soient en proportion des termes donez, (ce qui est fort facile par la metode du 1. chap.) & puis ayant ioint ces deus lignes ensemble, en sorte qu'elles n'en facent qu'vne, diuiser la proposée en mesme proportion [a] que la composée l'est au point de la conjonction des deus lignes. [a 10. 6]

Refutation de deus autres erreurs de Steuin touchant les incomensurables.

CHAP. VI.

OVtre tout ce que i'ay refuté de Steuin, ie remarqueray encore deus autres erreurs touchant cete doctrine des incomensurables. La premiere est vne fausse opinion relatiue aus precedentes, l'autre vne façon de parler tres-impropre.

Il dit premierement, que toutes sortes de nombres sont aussi bien quarez & cubes les vns que les autres, par exemple que 3. 5. 6. &c. sont aussi bien nombres quarez come 4. 9. 100. Sa raison est, que les nombres expliquans les quantitez Geometriques, reçoiuent vn nom conforme à cete quantité, de façon que 4. est apelé, à ce qu'il dit, nombre quaré, parce qu'il designe vn quaré Geometrique de 4. mesures quarées: & que partant 5. & 7. expliquans des quarez Geometriques de 5. & 7. mesures quarées, doiuent par la mesme raison, estre aussi bien tenus pour quarez, que quelques autres nombres que ce soit. I'auoüeray bien à Steuin, qu'il y a de l'aparence, que le nom de quaré a esté doné aus nombres, qui sont produis de la multiplication d'autres nombres par eus mesmes, à cause que l'on peut disposer leurs vnitez, en sorte qu'il s'en trouue autant en long qu'en large, de mesme que la longueur & la largeur d'vne superficie quarée sont egales: mais que le

nombre quaré ne ſoit tel, qu'à cauſe qu'il repreſente vn quaré Geometrique, c'eſt ce que ie nie abſolument, puiſque quand il n'y auroit point de quaré Geometrique en la nature, les nombres quarez ne laiſſeroient pas d'eſtre quarez d'eus-meſmes; & que toutes les demonſtrations qui s'en font en l'Aritmetique, n'en ſeroient pas moins veritables; bien que peut eſtre ne leur donât on pas le nom de quarez, & qu'on ſe contentât de les nomer (egalement egaus) parce que chacun ſeroit produit de la multiplication d'vn autre nombre par ſoy-meſme, ce qui n'ariue pas aus autres, n'y ayant aucun nombre, qui par ſa propre multiplication produiſe 5. & eſtant d'ailleurs impoſſible de diſpoſer en telle ſorte ſes vnitez indiuiſibles, qu'il y en ait autant en long que en large. De dire que c'eſt ℞5. qui produit le nombre 5. par ſa multiplication, nous auons aſſez fait voir que cela ne ſe peut, en prouuant que ℞5. eſt vne grandeur, & non pas vn nombre, & montré que Steuin l'auoüoit luy meſme, de façon que quand on dit que 5. a pour coté ℞5. ce terme de 5. ne deſigne pas alors vne multitude d'vnitez, qui eſt le nombre dont il s'agit maintenant, mais vn plan quaré Geometrique contenant la valeur de 5. meſures quarées, & ℞5. vne ligne droite, qui eſt coté du meſme quaré. Et ainſi il n'y a aucune contradiction à dire que ℞5. eſt racine quarée de 5. & que neanmoins 5. n'eſt pas nombre quaré, parce que lors que 5. a pour coté ℞5. il ne deſigne pas vn nombre, mais vn quaré ſuperficiel.

Quant à la façon de parler dont vſe Steuin, que i'ay dit eſtre fort impropre, c'eſt lors qu'il parle d'extraire la racine quarée d'vne ligne droite: ce qui, à dire le vray, n'a aucun ſens; puiſque ce ſont les quarez, & non pas les lignes droites, qui ont des côtez ou racines quarées, & que le côté ou la racine quarée eſt vne ligne droite, qui denote la longueur & la largeur d'vn quaré, parce que ces dimenſions y ſont egales, de façon que c'eſt parler fort improprement, que de doner vne racine quarée à vne ligne, puiſqu'elle n'a point de largeur. D'ailleurs, on n'vſe proprement du mot d'extraction de racine, que pour les nombres, & non pour les plans: & ſi on veut auſſi l'y apliquer, il faut dire que la racine quarée

s'extrait d'vn plan dont les cotez sont inegaus: & cete extraction est l'inuention d'vne moyene proportionele entre ces cotez inegaus.

Ce qui a trompé Steuin est la confusion de son esprit, qui ne luy permet pas de distinguer les choses come il faut. Car voyant que les nombres Binomiaus denotoient quelquefois des lignes droites, & que neanmoins en l'Algebre on enseigne d'en extraire les racines quarées, il a creu sans y faire autre reflexion, que les lignes droites auoient des racines quarées, sans considerer que les mesmes nombres designoient aussi des plans, & que c'est en cete qualité qu'on en tire les racines, & non pas lors que ce ne sont que des lignes droites.

Conclusion de cete 2e. partie

CHAP. VII.

COME c'est vn des moyens d'établir vne opinion, que de détruire celle qui luy est contraire: ie ne pense pas qu'on doiue trouuer étrange, si i'ay pris tant de soin de refuter ce que Steuin a écrit des incomensurables; & persone ne s'imaginera que i'aye esté pousſé à cela par aucune autre passion, que celle de rechercher la verité, si on prend la pene de considerer que i'estois obligé d'éclaircir autant qu'il m'estoit possible, vne matiere qui est tenuë pour fort embroüillée, & dont peu de persones ont écrit come il faloit; ce que ie ne pouuois mieus., qu'en disant mes sentimens de ceus qui y ont penetré le plus auant, tel qu'est celuy dont ie parle. Pour la pluspart des autres, ils en ont dit si peu de chose, qu'ils semblent, ou auoir eu peur de s'y engager, ou ne l'auoir gueres entenduë; car les Aritmeticiens parlans des nombres irrationaus se contentent de doner la pratique de leurs operations sans parler de leur origine, ny definir seulement ce qu'ils sont: & les Geometres supoſans que l'on en soit instruit, les apliquent simplement aus propositions du 10e. liure: & ie ne say persone qui s'y soit assez étendu, pour en doner vne parfaite conoissance, de façon que Steuin

eſt vn de ceus qui en a le plus écrit, mais non pas le mieus; & duquel par conſequent, i'ay deu auec plus de raiſon examiner les écris, particulierement à cauſe de l'eſtime que ſerce perſones en ont fait. Nonobſtant laquelle ie ne laiſſeray pas de dire, qu'il a tres-mal rencontré en beaucoup de choſes, & que l'on peut aiſément remarquer en tout plein d'endrois de ſes œuures, vne longueur ennuyeuſe & inſuportable; vn diſcours extremement obſcur; & vne grande confuſion d'eſprit.

Sa longueur paroît entre autres, au traité des triangles Sferiques, dont il met 46. cas au lieu que les autres reduiſent tout à 22.

L'obſcurité de ſon diſcours ſe reconoît en ſon Algebre & ailleurs, où il a le don de s'expliquer ſi bien, qu'il n'eſt preſque pas poſſible d'y rien comprendre.

Pour la confuſion de ſon eſprit, i'en ay déja doné quelque preuue: mais ce qu'il apele la regle d'Algebre, regle de faus, n'en eſt pas vne des moindres. Car ſur ce que la regle d'Algebre, de meſme que celle de faus, fait vne ſupoſition, il s'eſt imaginé que la regle d'Algebre eſtoit vne regle de faus. Ce qui eſt extremement ridicule, parce qu'il y a cete diference entre ces deus regles, que en la regle de faus on fait vne ou deus poſitions de nombres que l'on ſait eſtre faus; & ſi on rencontre d'abord le veritable, ce n'eſt que par hazard; au lieu qu'en celle d'Algebre on ne ſupoſe rien de faus, & qu'on ſe ſert tout d'vn coup du vray nombre, lequel on nome ſeulement d'vn autre nom l'apelant A, ou 1ℜ, ou 1N, ou de quelque autre ſorte, pource que du comencement on n'en ſait pas la valeur: mais en efet cet A, ou cete ℜ, eſt le vray nombre, dont il eſt queſtion, quoy qu'on ne le conoiſſe pas encores. De ſorte qu'il n'y a aucune fauſſe poſition en la regle d'Algebre, qui par conſequent ne doit pas eſtre nomée regle de faus.

Ie ne diray rien de ſon Apendice des incomenſurables, qui eſt vn ſomaire du 10e d'Euclide, où il a ſi bien reüſſi qu'il eſt ordinairement plus obſcur qu'Euclide meſme; non plus que de ſes téſes Matematiques, par ce que je les ay toutes refutées; ny de toutes les autres impertinences dont il eſt remply, parce que

ce

ce seroit trop entreprendre que de les remarquer toutes. Sur tout il est rare, quand il parle du siecle sage ; & qu'il dit que la langue Françoise ne vaut rien pour les sciences. A dire le vray il estoit fort capable d'en juger ; son Aritmetique qu'il a luy mesme écrite en François, montre assés combien il estoit sauant en notre langue. Mais il est incomparable, lors qu'il met en auant l'excelence du langage Flamand ou Holandois, lequel il semble vouloir persuader d'aprendre pour faire refleurir les sciences & les arts, come estant fort propre pour les expliquer. Pour moy ie crains fort, que si c'est vn des moyens necessaires pour rétablir ce siecle sage, le notre ne demeure encores long tems aussi fou que iamais, quelque auantage que nous y peussions rencontrer.

Neanmoins puisque, nonobstant tout ce que je viens de dire, Steuin n'a pas laissé d'estre dans l'aprobation de plusieurs bons espris ; & qu'on s'est bien doné la pene de traduire ses œuures en Latin & en François : ie ne feray point de dificulté de me soumetre à la censure des doctes : & proteste de chanter la palinodie, s'il est vray que ie me sois trompé ; & de leur estre extremement redeuable, s'ils me font conoitre la verité, au cas que ie ne l'aye pas rencontrée ; come estant la chose du monde que ie souhaite le plus dans les sciences.

I'ay voulu adiouter à ce traité general des incomensurables, l'Algoritme ou Aritmetique pratique des nombres irrationaus, afin que les studieus sans estre obligés de l'aprendre ailleurs, puissent entendre l'aplication que i'ai faite des nombres, à chaque proposition de notre 10e liure, à quoy ie m'asseure qu'ils n'auront pas peu de contentement. Et parce que toutes les grandeurs dont il y est parlé, peuuent estre exprimées par des nombres dont le plus haut caractere Radical est celuy-cy R/. qui signifie racine quaré-quarée, sans auoir besoin de ces autres R//, R/c. R/qc. &c. toutes les operations dont ie parleray icy, ne passeront pas plus auant que ce mesme caractere R/, renuoyant le Lecteur qui en desirera dauantage à ceus qui en ont traité plus amplement, come Stifel, Bombel, Clauius, & autres.

TROISIE'ME PARTIE DE L'INTRODVCTION.

CONTENANT L'ARITMETIQVE PRATIQVE DES NOMBRES Irrationaus.

DE LA DEFINITION DES nombres irrationaus.

CHAP. I.

NOvs avons dit au comencement de la 2e. partie que la plusſpart des Aritmeticiens n'avoient pas doné la vraye definition des nombres irrationaus, & qu'on pouuoit croire qu'ils ne l'avoient pas ſeulement conuë. Ie ne veus pas neanmoins aſſeurer que tant de grans perſonages qui ont traité de ces nombres, ayent ignoré leur nature, mais il eſt bien certain qu'ils les ont aſſés mal definis, & qu'ils n'inſtruiſent pas beaucoup vn Lecteur lors qu'ils diſent, que les nombres irrationaus ſont *des racines de nombres, leſqueles ne ſe peuuent exprimer par nombres*, ou bien, *que ce ſont des racines de nombres qui n'ont point de racines*; par exemple que ℞ 6. eſt la racine quarée du nombre 6. qui n'eſt pas quaré, ou bien que ℞ c 10. eſt la racine cubique du nombre 10. qui n'eſt pas cube; ce qui, a proprement parler, eſt dire que ces nombres ſont des imaginations & des chimeres; puiſqu'il n'y a point de nombres qui multipliez quarément ou cubiquement par eus meſmes, produiſent 6. ou 10. & que neanmoins par des

racines de nombres on ne peut entendre que des nombres. Or il ne sera pas fort dificile de trouuer par le moyen de la doctrine de notre 2e partie, vne meilleure definition de ces nombres, puisque nous auons montré quel estoit leur genre, & que le terme qui sert à les exprimer, fait assés conoitre leur diference.

Ie dis donc que les nombres irrationaus sont des grandeurs exprimées par des racines imaginaires de nombres; qui ont mesme proportion à quelques autres grandeurs de leur espece qu'auroient ces racines imaginaires à des nombres, si elles estoient de vrais nombres. Ainsi $\sqrt{12}$. est vne grandeur, (c'est à dire ligne, superficie, ou solide) exprimée par la racine imaginaire du nombre 12. (ie dis imaginaire, parce que, come ie l'ay déja montré, 12. estant nombre ou multitude d'vnitez, par exemple d'homes, ne peut estre produit par aucun nombre ou multitude d'homes multipliée par soy mesme) laquelle grandeur a mesme proportion à vne autre grandeur de son espece, qu'auroit la racine veritable du nombre 12. s'il y en auoit vne, à quelque nombre come 3. 4. &c. Il faut remarquer sur cette definition,

Premierement, que cette proportion d'vne racine imaginaire à vn nombre, quoy qu'elle ne soit pas réele, ne laisse pas de faire conceuoir en quelque façon les proportions qui ne se peuuent exprimer par des nombres.

Segondement, que le nombre irrationel comprend trois choses, sçauoir la grandeur, la racine imaginaire, & la proportion auec quelque grandeur.

Troisiémement, que le nombre irrationel ne peut estre definy que par la proportion d'vne grandeur à vne autre grandeur, parce que les grandeurs considerées seules & absolument, ne sont pas plus irrationeles les vnes que les autres, mais sont telles seulement par leur comparaison auec d'autres de leur espece, au lieu que les nombres ordinaires sont nombres rationaus ou multitudes d'vnitez sans aucune comparaison à d'autres nombres, & partant peuuent estre definis sans parler de proportion.

En dernier lieu, que les nombres irrationaus se considerent souuent abstrais & détachez des choses, de mesmes que les

Rationaus, mais que quand on y aplique leurs termes, ce ne peut estre qu'à des grandeurs, parce que réelement ils ne sont que des grandeurs; au lieu que les termes numeraus ordinaires peuuent estre entendus & de la quantité discrete, & de la continüe.

Il y a deus sortes de nombres irrationaus; simples, & composés. Les simples n'ont qu'vn terme, tels que sont tous ceus que nous auons aportés pour exemples iusques icy R̸10. R̸15. &c. Les autres ont plusieurs termes & se forment par l'addition & soustraction des simples; ce qui est cause que nous n'en parlerons qu'au Chapitre de ces deus regles.

De la Numeration des Nombres irrationaus simples.

CHAP. II.

LA numeration des nombres irrationaus simples est facile si on se souuient qu'ils ont toujours deus caracteres, l'vn radical, l'autre numeral. Le premier exprime l'espece de la racine, le segond designe vn nombre absolu ou Aritmetique, dont le nombre irrationel est racine. Et partant vn nombre irrationel simple estant proposé, si on enonce l'espece de la racine, & la valeur ordinaire du nombre absolu, la numeration en sera faite. Ainsi R̸8. signifie Racine quarée de 8. ou simplement Racine de 8. ce qui s'entend toujours de la Racine quarée. Et R̸25880. signifie, racine de racine de 25880. ou racine quaré-quarée de 25880. &c. Que si on proposoit plusieurs nombres irrationaus pour les nombrer, ce ne seroit plus la numeration simple, mais l'addition; de laquele nous parlerons ci-apres.

De la multiplication & diuiſion des nombres irrationaux ſimples.

CHAP. III.

CEs deus regles precedent en ordre de doctrine, l'addition & la ſouſtraction, eſtant neceſſaire de ſauoir multiplier & diuiſer pour pouuoir adjouter & ſouſtraire. Si les nombres propoſez ſont racines de meſme denomination, c'eſt à dire toutes deus quarées ou quaré-quarées, il les faut multiplier & diuiſer come ſi c'eſtoit des nombres abſolus, & adiouter au produit ou au quotient leur ſigne radical. Ainſi voulant multiplier ℞7. par ℞5. ie multiplie 7. par 5. & ie mets au deuant de leur produit qui eſt 35. le ſigne ℞. de façon que ℞35. eſt ce que produiſent ℞7. & ℞5. multipliés l'vn par l'autre. De meſme ℞3. multipliant ℞14. produit ℞42. Et ℞40. diuiſé par ℞5. produit ℞8. pour quotient.

Mais ſi les nombres propoſés ne ſont pas de meſme denomination : il les y faut reduire en prenant le quaré-quaré de la racine qui n'eſt pas quarée, & luy donant le ſigne radical ℞. Par exemple pour reduire ℞3. à meſme denomination que ℞6. ie prens le quaré-quaré de ℞3. qui eſt 9. car 3. eſt ſon quaré, & par conſequent 9. qui eſt quaré de 3. ſera quaré-quaré de ℞3. ce qu'ayant fait, ie done à 9. le ſigne ℞. & ainſi ℞9. qui eſt meſme choſe que ℞3. eſt de meſme denomination que ℞6.

S'il faut multiplier ou diuiſer vn nombre irrationel par vn rationel, il faudra auſſi reduire le rationel à meſme denomination de racines, que l'irrationel, en prenant ſon quaré ou quaré-quaré, & y prepoſer le ſigne radical de l'irrationel. De ſorte qu'ayant à multiplier ℞48. par 2. ie prens le quaré de 2. qui eſt 4. afin d'auoir deus racines de meſme denomination ℞48. & ℞4. Et pour reduire 3. à meſme denomination que ℞243. il faut prendre le quaré-quaré de 3. qui eſt 81. (ce qui ſe fait en quarant ſon quaré qui eſt 9.) & luy donant le ſigne ℞, le nombre ℞81. (qui eſt meſme choſe que 3. ſans qu'il en

ſoit augmenté ny diminué,) ſe trouue de meſme denomination que R/243. Cette reduction faite, l'operation ſe fera come nous auons dit auparauant, & le produit de R2 48 par 2. ſera R2 192. & ainſi des autres.

Si le produit de la multiplication ou de la diuiſion, eſt vn nombre qui ait racine rationele de meſme denomination que les nombres propoſés, il faut l'extraire ſans y adiouter le ſigne radical: come en la multiplication de R2 12. par R2 3. le produit eſt R2 36. c'eſt à dire 6. qui eſt la racine de 36. Et R/27. multiplié par R/3. produit R/81. c'eſt à dire 3. Et ſi on diuiſe R/243. par R/3. le produit eſt auſſi R/81. ou 3. parce que 3. eſt racine quaré-quarée de 81.

Mais ſi deus racines quaré-quarées produiſent vn nombre qui ait racine quarée, mais non pas quaré-quarée, il faut en extraire cete racine & luy laiſſer le ſigne R2. Et de cete ſorte R/6. & R/24. produiſent R2 12. parce que 6. & 24. produiſent 144. qui a pour racine quarée 12. mais parce que 12. n'eſt pas nombre quaré, ie luy laiſſe le ſigne R2. & partant le produit eſt R2 12. qui eſt meſme choſe que R/144.

Si le quotient eſt vne fraction, il luy faut doner le ſigne radical des nombres propoſés, lequel ſe doit entendre de tous les deus termes, & ainſi R2 $\frac{3}{4}$ veut dire racine quarée de $\frac{3}{4}$ le nombre $\frac{3}{4}$ ſe prenant lors pour vn quaré; & non pas que ce ſoit R2 3. diuiſé par 4. ny 3. diuiſé par R2 4. car au premier ſens il faudroit eſcrire R2 $\frac{3}{4}$ ou, ce qui ſeroit mieus, R2 $\frac{3}{16}$ & en la 2e ſignification la fraction ſeroit R2 $\frac{3}{4}$ c'eſt à dire $\frac{3}{2}$.

Lors que la fraction eſt quarée, il en faut extraire la racine come d'vn nombre entier, mais elle n'eſt pas quarée, ſi tous les deus termes ne ſont quarez. Ainſi R2 $\frac{4}{9}$ eſt meſme choſe que $\frac{2}{3}$ parce que tous les deus termes ſont quarés, mais R2 $\frac{16}{24}$. n'eſt pas fraction quarée, encores que ſon numerateur 16. ſoit quaré, par ce que le denominateur ne l'eſt pas.

Au reſte les fractions irrationeles ſe gouuernent entierement par les regles des fractions ordinaires & des irrationaus entiers, & partant il ſeroit invtile de s'y aréter dauantage, puiſque ces regles eſtans bien entenduës, on n'y trouuera aucune dificulté.

De l'Addition & soustraction des nombres irrationaus simples.

CHAP. IIII.

POVR faire ces deus regles il faut premierement sauoir, si les nombres proposez sont comensurables ou incomensurables, ce qui se conoit par la diuision ou du plus grand par le moindre, ou du moindre par le plus grand, car si le quotient est vn nombre rationel, c'est à dire qui ait racine de mesme denomination que les nombres proposez, en ce cas ils ont mesme proportion qu'vn nombre rationel à vn autre nombre rationel, & partant sont comensurables: mais si le quotient est vn nombre irrationel, & que la racine de mesme denomination ne s'en puisse exprimer que par vn signe radical, ils sont incomensurables. Ce qui s'entendra aisément par ces exemples,

$$\begin{array}{r} \cancel{2}2 \\ \text{℞}\,\cancel{2}\cancel{0}\cancel{0} \\ \text{℞}\,\cancel{1}\cancel{8}\cancel{8} \\ \cancel{1} \end{array} \left\{ \text{℞}\,11\tfrac{1}{9} \right. \qquad \begin{array}{r} \text{℞}\,\cancel{4}\cancel{8} \\ \text{℞}\,\cancel{6} \end{array} \left\{ \text{℞}\,8 \right.$$

Au premier exemple ℞ 200. estant diuisé par ℞18. le quotient est ℞ $11\frac{1}{9}$ ou ℞ $\frac{100}{9}$. & parce que $\frac{100}{9}$. est vn nombre quaré qui a racine de mesme denomination que les nombres proposez, qui sont racines quarées, sauoir $\frac{10}{3}$. nous conclurons que ℞ 200. & ℞18. sont comensurables. Mais au segond exemple ℞48. & ℞6. sont incomensurables, parce que leur quotient est nombre irrationel, sauoir ℞ 8. d'autant que 8. n'est pas nombre quaré.

Or le quotient estant vne fraction rationele, les nombres proposez ont entre eus mesme proportion que le numerateur & le denominateur, selon qu'ils se répondent entre eus le plus grand au plus grand, & le moindre au moindre, come au premier exemple ℞200. est à ℞18. come 10. numera-

teur de la fraction à 3. qui eſt le denominateur, c'eſt à dire que ℔ 200. contient 10. de telles parties dont ℔ 18. en contient 3.

Lors que le quotient eſt vn nombre entier, il en faut faire vne fraction en luy donant l'vnité pour denominateur; & les nombres propoſez auront encores meſme proportion que les termes de cete fraction. Ainſi ℔ 243. diuiſée par ℔ 3. a pour quotient ℔ 81. c'eſt à dire 3. ou $\frac{3}{1}$. & partant ℔ 243. eſt en meſme proportion auec ℔ 3. que 3. à 1. ou bien ℔ 243. eſt triple de ℔ 3.

Si les nombres propoſez à adiouter ſont comenſurables, il faut chercher leur plus grande comune meſure, ou bien quel eſt le nombre que chacun contient tant ou tant de fois. Or quand le quotient que nous venons de dire eſt vn nombre entier, le moindre des propoſez eſt cete plus grande comune meſure, parce que tout nombre ſe meſure ſoy-meſme vne fois, mais ſi le quotient eſt vne fraction, il faut diuiſer le plus grand nombre des propoſez par le plus grand terme de la fraction, ou le moindre par le moindre, & le quotient ſera leur plus grande comune meſure. Come au premier exemple diuiſant ℞ 200. par 10. qui eſt le plus grand terme de la fraction, c'eſt à dire par ℞ 100. le quotient ſera ℞ 2. ou bien diuiſant ℞ 18. par 3. qui eſt le moindre terme, c'eſt à dire par ℞ 9. ſuiuant les preceptes de la diuiſion, on aura encores le meſme quotient ℞ 2. & partant ℞ 2. eſt leur plus grande comune meſure, ou bien ce nombre que les termes de la fraction nous ont apris eſtre contenu dis fois en ℞ 200. & trois fois en ℞ 18. D'où il s'enſuit que la ſome des nombres propoſez eſt 13. fois ℞ 2. Et partant ſi on multiplie ℞ 2. par 13. c'eſt à dire par ℞ 169. on aura neceſſairement la ſomme de ℞ 200. & ℞ 18. adioutez enſemble, ſauoir ℞ 338. puiſque ℞ 338. contient 13. fois ℞ 2. Et en l'autre exemple ℔ 243. & ℔ 3. feront pour ſome ℔ 768. parce que nous auons trouué auparauant que ℔ 243. contient 3. fois ℔ 3. & par conſequent les deus eſtans iointes enſemble, la ſome doit eſtre quatre fois ℔ 3. ce qui eſt cauſe que ie multiplie ℔ 3. par 4. c'eſt à dire par ℔ 256. qui eſt vne meſme choſe, & le produit eſt ℔ 768. Il faut donc toujours adiouter les termes de la fraction enſemble, & multi-

multiplier cette ſome par la plus grande comune meſure des nombres propoſez, & le produit ſera la ſome cherchée.

En vn mot la regle generale de l'addition des racines ſimples comenſurables, conſiſte en ces deus preceptes.

1. Deus racines ſimples eſtans propoſées à adiouter, ayant diuiſé l'vne par l'autre, ſi le quotient eſt vne fraction, il faut encores diuiſer la plus grande racine par le plus grand terme de la fraction, ou le moindre par le moindre (car ce ſera vne meſme choſe) & puis multiplier ce ſegond quotient par la ſome des deus termes de la fraction, parce que le produit de cette multiplication ſera la ſome des racines propoſées.

2. Si le quotient de la premiere diuiſion eſt vn nombre entier, il ne faut point faire de ſegonde diuiſion, mais adiouter ſeulement l'vnité au quotient, & multiplier cette ſome par le moindre des nombres propoſés à adiouter.

La ſouſtraction n'eſt diferente de l'addition, qu'en ce que au lieu d'adiouter enſemble les termes de la fraction, ou d'adjouter l'vnité au quotient, ſi c'eſt vn nombre entier, il faut ſouſtraire le moindre terme de la fraction, du plus grand, ou l'vnité du quotient, quand il eſt nombre entier: & multipliant le reſte par la plus grande comune meſure des nombres propoſés, le produit ſera leur diference, ou ce qui reſtera du plus grand apres en auoir oté le moindre. Ainſi pour ſouſtraire R.50. de R.512. ayant diuiſé l'vn par l'autre, le quotient eſt R.$\frac{256}{25}$ c'eſt à dire $\frac{16}{5}$ & partant ie diuiſe R.50. par 5. qui en racines eſt R.25. & vient R.2. pour comune meſure. Puis otant 5. de 16. reſte 11. c'eſt à dire R.121. qui multiplié par R.2. produit R.242. diference de R.512. & R.50. Par meſme raiſon voulant ſouſtraire R/3. de R/243. parce que le quotient de leur diuiſion eſt 3. en ayant oté l'vnité reſte 2, c'eſt à dire R/16. qui multiplié par R/3. le produit eſt R/48. diference de R/243. & de R/3. Tout ceci n'a aucune dificulté, ſi on ſe ſouuient bien des preceptes de la multiplication & de la diuiſion.

Mais ſi les nombres propoſés à adiouter ou à ſouſtraire ſont trouués incomenſurables par leur diuiſion, les regles d'addition & de ſouſtraction conſiſtent en ces deus ſignes

+ & —, dont le premier qui signifie plus, se doit interposer entre les nombres incomensurables que l'on veut adiouter, & le segond qui signifie moins, doit estre mis entre les deus nombres de la soustraction. Ainsi voulant adiouter ℞20. & ℞15, parce que le quotient de leur diuision est ℞$\frac{3}{4}$ qui est vn nombre irrationel, & que par consequent ils sont incomensurables, on ne peut les adiouter qu'en cette sorte ℞20. + ℞15. c'est à dire ℞20. plus ℞15. & pour oter ℞3. de ℞10. le reste sera ℞10—℞3. qui veut dire ℞10. moins ℞3. ou ce qui reste de ℞10. en ayant oté ℞3. n'estant pas possible d'exprimer autrement cette some ny cette diference, parce que leur proportion ne se peut exprimer en nombres rationaus. Le mesme se doit entendre de l'addition & soustraction des rationaus & irrationaus meslez ensemble, come il se voit en ces exemples 10 + ℞45. ℞84 — 6. Et s'il y auoit plus de nombres à adiouter ou soustraire, il faudroit toujours les ioindre par ces signes, come ℞48 + ℞10 — ℞6 : ℞80 + ℞15 + 2 — ℞3 &c.

Ces sortes de nombres ainsi acouplez s'apelent nombres composés & diminüés. Ceus qui n'ont que deus termes ioins par + se noment Binomes, c'est à dire nombres de deus noms : ceus qui n'en ont que deus auec l'interposition de — s'apelent Residus ou Apotomes. Les autres qui sont composez de plus de deus termes, soit que tous, ou vne partie portent le signe + ou celuy de —, sont nomez Trinomes, Quadrinomes, &c. selon le nombre de leurs noms. Mais parce que toutes les lignes & superficies, dont il est parlé dans cettaité, se peuuent exprimer par racines simples, ou par Binomes & Residus : nous ne ferons ici aucune mention de tous ceus qui ont plus de deus termes, outre que ce seroit aler à l'infiny, & que l'on peut estre sufisamment instruit de la nature des irrationaus, pour iuger du reste, par la conoissance des Binomes & des Residus. Et parce que leur Algorisme est vn peu diferent de celuy des racines simples, nous en traiterons en particulier.

De l'Addition & soustraction des Binomes & des Residus.

CHAP. V.

CEs deus regles se font par les signes de plus, & de moins, si tous les nombres proposez sont incomensurables; mais s'il y en a de comensurables, il les faut adiouter come il a esté enségné au dernier chapitre.

Ainsi la some de R/ 45. & de R/ 27 + R/ 20. ne seroit pas bien exprimée en cette sorte,

R/ 45 + R/ 27 + R/ 20.

parce que R/ 45. & R/ 20. sont comensurables, & partant leur some sera R/ 125 + R/ 27. Si on adioute vn Residu à vne racine simple ou à vn nombre rationel, il faut laisser au segond nom du Residu le signe —, come pour adiouter R/ 32. auec R/ 24 — 3. la some sera R/ 32 + R/ 24 — 3. parce qu'encores qu'on face addition, neanmoins le nombre 3. estant soustrait de R/ 24. ne se doit pas adiouter, mais seulement R/ 24. diminué de 3. ou R/ 24 — 3. come si ce n'estoit qu'vn nombre simple.

En la soustraction tout au contraire, pour soustraire vn Residu d'vn nombre simple, il faut soustraire le terme qui a le signe + & adiouter celui qui a le signe —. Ainsi voulant soustraire R/ 20 — 4. de R/ 40. le reste est R/ 40 — R/ 20 + 4. Parce que 4. estant déja soustrait de R/ 20. denote qu'il ne faut pas oter R/ 20. tout entier de R/ 40. mais que l'on en doit reseruer 4. ainsi que le mot le designe assez, quand on dit qu'il faut oter R/ 20. moins 4. & par consequent le terme 4. se doit adiouter. De mesme R/ 5 — 2 estant proposé à soustraire de 6. le reste est 8 — R/ 5. adioutant 2. auec 6. au lieu de le soustraire.

Si tous les deus nombres proposez sont composez ou diminués, il les faut disposer come aus regles des nombres vulgaires, en sorte que les comensurables soient l'vn sur l'autre, quoy qu'en ce faisant le nombre qui a le signe — se trouue quelque fois le premier: de plus, en la soustraction le plus grand nombre de qui on soustrait, doit estre placé au dessus, & pour cete

raiſon eſt apelé nombre ſuperieur. Ainſi voulant adiouter 6 — ℞8. auec ℞128 — 10: & ſouſtraire ℞52 — ℞8. de ℞512 + ℞208. les nombres ſe doiuent diſpoſer en cete ſorte

6 — ℞8.	℞512 + ℞208.
— 10 + ℞128.	— ℞8 + ℞52.

Il faut apres cela bien prendre garde aus ſignes + & —, & obſeruer les deus regles ſuiuantes.

1. Meſmes ſignes produiſent meſmes ſignes, excepté en la ſouſtraction quand le nombre ſuperieur eſt moindre que l'inferieur, car en ce cas il faut ſouſtraire le ſuperieur de l'inferieur, & de + en faire —, & de — en faire +.

2. La diuerſité des ſignes change l'eſpece de l'operation. Et en l'addition ſe doit metre le ſigne que porte le plus grand nombre, mais en la ſouſtraction, celuy du nombre ſuperieur.

Le ſens du premier precepte eſt, que ſi deus nombres propoſez à adjouter ou à ſouſtraire, ont tous deus le ſigne +, ou tous deus le ſigne —, la ſome ou le reſte doit auſſi porter le meſme ſigne, excepté en la ſouſtraction, &c. Le reſte eſt facile.

Quant au ſegond precepte il veut dire que ſi deus nombres ont l'vn le ſigne +, & l'autre le ſigne —, il faut ſouſtraire en l'addition au lieu d'adjouter, & en la ſouſtraction adjouter au lieu de ſouſtraire, &c.

Voicy des exemples de la premiere partie du premier precepte, le premier d'addition, l'autre de ſouſtraction.

Addition.	*Souſtraction.*
℞20 + ℞8.	℞512 — ℞80
℞5 + ℞2.	℞32 — ℞5.
Som. ℞45 + ℞18.	Reſte. ℞32 — ℞5.

Ces exemples ſont faciles y ayans meſmes ſignes par tout. En voicy vn de l'exception.

136 — R40.
42 — R160.

Reste 94 + R40.

En cete soustraction R40. & R160. ont mesme signe, mais ne pouuant soustraire R160. de R40. qui est le nombre superieur, j'ote R40. de R160. & reste R40. à qui ie done le signe +, à cause que les nombres proposez ont le signe —, bien que pour l'ordinaire le nombre superieur & l'inferieur ayans mesme signe, leur diference ou reste doiue porter le meime signe qu'eus.

Exemple du segond precepte, le premier d'addition, l'autre de soustraction.

6 — R8.	14 + R50.
— 10 + R128.	6 — R32.
Som. — 4 + R72.	Res. 8 + R162.

Au premier exemple qui est d'addition, parce que les nombres 6. & 10. sont marquez diferemment, l'vn du +, (car tout nombre qui n'a point de signe, come il ne s'en met point au comencement ou au premier nom d'vn Binome, est reputé auoir +) & l'autre du —, il faut soustraire le moindre du plus grand au lieu de les adjouter, & doner au reste qui est 4. le signe du plus grand nombre qui est —. De mesme parce que R8. & R128. sont marquez diuersement, il faut soustraire R8. de R128. au lieu de les adiouter ensemble, & doner à leur reste qui est R72. le signe +, qui est celuy du plus grand nombre R128. Et ainsi la some de ces deus nombres est R72 — 4. car il faut restituer ces termes selon leur ordre naturel, quoy qu'à cause de la dispositiõ des nombres proposez nous ayons écrit au dessous — 4 + R72.

On peut remarquer en cete operation, qu'il ne s'y fait que

fouſtraire, & neanmoins il ne faut pas croire que ce ſoit vne fouſtraction; car qui voudroit fouſtraire R/128 — 10. de 6 — R/8. le reſte ſeroit bien diferent de R/72 — 4. car ſuiuant ce precepte on trouueroit 16 — R/200.

Au ſegond exemple R/50. & R/32. s'adioutent enſemble, au lieu de fouſtraire l'vn de l'autre, & la ſome eſt R/162. à qui ie done le ſigne +, come eſtant celuy du plus grand nombre. Et ne faut pas ſe perſuader pourtant que ce ſoit vne addition, mais c'eſt la diuerſité des ſignes qui change ſeulement la façon d'operer, & qui voudroit adiouter enſemble 14 + R/50. & 6 — R/32. auroit pour ſome 20 + R/2.

Par la raiſon du ſegond precepte, pour adiouter vn Binome auec vn Reſidu de meſmes noms, il ne faut que doubler le premier ou plus grand nom: au contraire voulant fouſtraire le Reſidu du Binome, il ne faut que doubler le ſegond, come il ſe voit en ces exemples ſans les expliquer d'auantage.

Add.	6 + R/20	Souſt.	R/80 + 4.
	6 — R/20		R/80 — 4
	12 — 0		0 + 8.

La verité de ces preceptes ſe reconoitra par le moyen des nombres abſolus, y operant ſuiuant ce que nous venons de dire, comme s'ils eſtoient irrationaus.

Addition.	20 + 16	Souſtraction.	30 — 3.
	10 — 8		15 — 6.
Somme	30 + 8.	Reſ.	15 + 3.

L'addition & la ſouſtraction ſe ſeruent de preuue l'vne à l'autre come aus nombres abſolus, ce qui eſt facile à experimenter.

De la multiplication & diuision des Binomes & des Residus.

CHAP. VI.

LA multiplication de ces nombres se fait en multipliant tous les noms les vns par les autres suiuant les regles de la multiplication des racines simples, ayant seulement égard à ces deus preceptes de + & de —.

1. Plus par plus, & moins par moins produisent plus.
2. Plus par moins & moins par plus produisent moins.

C'est à dire en vn mot que deus nombres qui ont mesme signe, estans multipliez l'vn par l'autre produisent vn nombre qui doit auoir le signe + mais s'ils ont diferens signes, le produit doit toujours auoir le signe —.

La multiplication de chaque nombre par chaque nombre estant faite, & chaque produit escrit au dessous des multipliez il faut adiouter les produis suiuant les regles de l'addition. Exemple où il y a toujours +.

$$\begin{array}{r} 10 + \text{R}\!\!\!/\ 20. \\ 5 + \text{R}\!\!\!/\ 3. \\ \hline \text{R}\!\!\!/\ 300 + \text{R}\!\!\!/\ 60 \\ 50 + \text{R}\!\!\!/\ 500. \\ \hline 50 + \text{R}\!\!\!/\ 500 + \text{R}\!\!\!/\ 300 + \text{R}\!\!\!/\ 60. \end{array}$$

La some de ces produis est vn Quadrinome, à cause qu'ils sont tous incomensurables, & ne se peuuent adiouter d'autre façon.

Quand les nombres proposez ont tous les deus signes, il faut bien prendre garde de mettre à chaque produit le signe qui luy est deu suiuant les preceptes, pour ne point causer d'equiuoque en l'addition.

$$\begin{array}{r} \text{R}\!\!\!/\,72 + 4. \\ \text{R}\!\!\!/\,8 - 2. \\ \hline -\text{R}\!\!\!/\,288 - 8 \\ +24 + \text{R}\!\!\!/\,128. \\ \hline 16 - \text{R}\!\!\!/\,32. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{R}\!\!\!/\,45 - \text{R}\!\!\!/\,8. \\ \text{R}\!\!\!/\,3 - \text{R}\!\!\!/\,2. \\ \hline -\text{R}\!\!\!/\,4050 + 2. \\ \text{R}\!\!\!/\,135 - \text{R}\!\!\!/\,72. \\ \hline \text{R}\!\!\!/\,135 - \text{R}\!\!\!/\,4050 - \text{R}\!\!\!/\,72 + 2. \end{array}$$

Au premier exemple, 2. multipliant 4. produit 8. auec le signe — & multipliant R/72, il produit R/288. auec le mesme signe, parce que 2. a le signe —, & les multipliez +. Au segond exemple R/2. multipliant R/8. produit R/16. c'est à dire 2. à cause que le multiplicateur & le multiplié ont mesme signe, quoy que negatif; & R/2. multipliant R/45. produit R/4050. auec le signe —, à cause de la diuersité des signes. Quant à la some des produis elle est facile à trouuer en l'vn & en l'autre exemple, si on se souuient des preceptes de l'addition.

Si on multiplie vn Binome dont les noms ne soient pas R/. c'est à dire racines quaré-quarrées, par vn Residu de mesmes noms, ou par vn autre dont les noms soient comensurables à ceus du Binome & en mesme proportion, le produit sera vn seul nombre Rationel.

$$\begin{array}{r} \text{R}\!\!\!/\,12 + 3 \\ \text{R}\!\!\!/\,12 - 3 \\ \hline -\text{R}\!\!\!/\,108 - 9. \\ 12 + \text{R}\!\!\!/\,108 \\ \hline 12 - \text{R}\!\!\!/\,108 + \text{R}\!\!\!/\,108 - 9 : 1.3. \end{array}$$

Come il se voit en cet exemple, ou toute la some des produis n'est que 3. parce que R/108. estant nié & afirmé, la negation

gation de l'vn détruit l'afirmation de l'autre, & partant c'est come s'il n'en estoit aucune mention, de sorte qu'il ne reste que 12 — 9. qui veut dire 3.

D'où il s'ensuit que pour multiplier vn Binome par son Residu, il sufit de soustraire du quaré du plus grand nom, ~~du~~ le quaré du moindre.

Ainsi	℞20 + ℞2
multip. par	℞20 — ℞2.
Produit	18.

Mais si le Binome n'a pas mesmes noms que le Residu, & qu'ils soient seulement comensurables les vns aus autres & en mesme proportion, la multiplication se fera en multipliant seulement les deus premiers noms l'vn par l'autre, & les deus derniers aussi, (sans qu'il soit besoin de multiplier le segond de l'vn par le premier de l'autre) & la diference de ces deus produis, sera le produit de la multiplication, sans avoir égard à la multiplication des premiers noms par les derniers, parceque les produis en sont toujours égaus & marquez de signes contraires, & par consequent se détruisent l'vn l'autre.

Par exemple 10 + ℞40.
5 — ℞10.

— ℞1000 — 20.
5 + ℞1000

Prod. 50 — 20. i. 30,

Le produit de la multiplication est encores vn nombre simple mais irrationel, encores que les nombres Binomiaus & Residus soient composez de racines quaré-quarées, pourueu que les quarez de leurs noms soient comensurables.

℞24 + ℞6.
℞24 — ℞6.

℞6.

Si on veut quarer vn Binome ou vn Residu, cela se fe-

ra plus commodement par la 4e & par la 7e propoſition du 2e d'Euclide qu'en faiſant la multiplication toute entiere. Car il ne faut qu'adiouter enſemble les quarez des noms & le double du produit d'vn nom multiplié par l'autre pour quarer les Binomes, & ne faut qu'ôter le double du meſme produit, de la ſome des quarez pour les Reſidus. Ainſi voulant quarer 6 + R15. ayant adjouté les quarés des parties qui ſont 36. & 15. dont la ſome eſt 51. ie multiplie R15. par 6. qui eſt R36. dont le produit eſt R540. & ſon double R2160. & partant le quaré de 6 + R15. eſt 51 + R2160. & celuy de 6 — R15 eſt 51 — R2160.

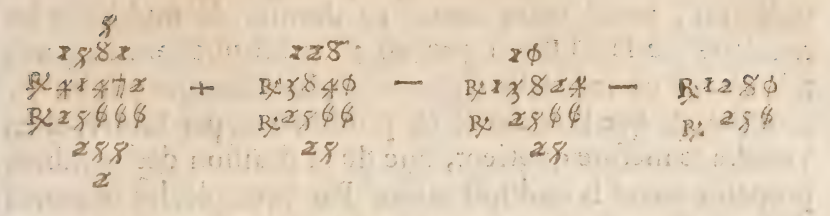
Quant à la diuiſion des nombres compoſez & diminüez, ſi le diuiſeur eſt vn nombre ſimple, elle ſe fait come celle des irrationaus ſimples, en diuiſant chaque nom du nombre à diuiſer, par le diuiſeur. Ainſi diuiſant R48 + R6. par R3. le quotient ſera 4 + R2.

$$\frac{R48 + R6}{R3 \quad R3} \left\{ 4 + R2. \right.$$

Que ſi le diuiſeur eſt vn nombre compoſé ou diminüé, il faut multiplier tant le diuiſeur que le nombre à diuiſer par le Reſidu du diuiſeur, ſi c'eſt vn Binome ou par ſon Binome, ſi c'eſt vn Reſidu, afin d'auoir vn nombre ſimple pour diuiſeur, & puis faire la diuiſion par le moyen des produis come au dernier exemple, c'eſt à dire diuiſant tous les noms du nouueau nombre à diuiſer par le nouueau diuiſeur. Ainſi voulant diuiſer ce Binome R1728 + R160. par cet autre R24 + R8. le nouueau diuiſeur ſera 16. Ôtant du quaré du premier nom, qui eſt 24. le quaré du dernier qui eſt 8. & le nouueau nombre à diuiſer ſera

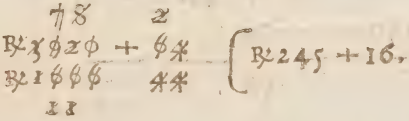
R41472 + R3840 — R13824 — R1280.

lequel diuiſé par 16. c'eſt à dire par R256.



le quotient sera (℞162 + ℞15 — ℞54 — ℞5.

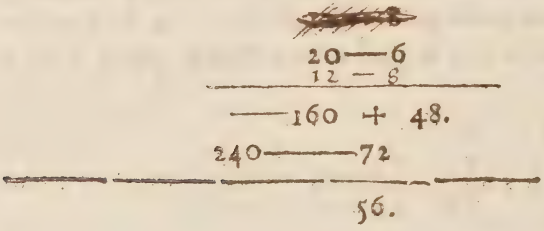
Quelques vns se contentent d'exprimer la diuision par l'interposition d'vne ligne en faisant vne fraction, $\frac{℞1728 + ℞160}{℞24 + ℞8}$ ce qui est peut estre plus comode, lors que, come en cet exemple, toutes les parties du nouueau nombre à diuiser, sont incomensurables : mais lors qu'il y en a de comensurables, la diuision produit vn nombre qui n'est pas si obscur que la fraction, come en l'exemple suiuant. Qu'il faille diuiser ℞80 + 6 par ℞20 — 4. si on multiplie ℞20 — 4. par son Binome ℞20 + 4. le nouueau diuiseur sera 4. & multipliant aussi ℞80 + 6. par ℞20 + 4. le nombre à diuiser sera ℞3920 + 64. lequel estant diuisé par 4. c'est à



dire par ℞16. le quotient sera ℞245 + 16. ou pour mieus dire 16 + ℞245. Et ne faut pas s'étoner que le quotient soit plus grand que le nombre diuisé, puisque c'est vne chose ordinaire aus fractions des nombres vulgaires, car en diuisant $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{4}$. le quotient sera $\frac{8}{3}$. qui est $\frac{2}{3}$ plus que $\frac{1}{3}$. & neanmoins les regles des fractions rationeles, sont tres-certaines, come sont aussi celles des nombres irrationaus, mais mon dessein n'est pas de demontrer icy ny les vnes ny les autres, ne voulant doner qu'vne pratique & non pas vne demonstration de leurs regles. Seulement diray je, pour la satisfaction de ceus qui pouroient douter de la certitude de ces preceptes, qu'ils se peuuent verifier par les nombres

vulgaires, come entre autres ce dernier de multiplier les nombres de la diuiſion par vn 3e. nombre, eſtant tres certain que ſi on multiplie deus nombres ordinaires par vn 3e. nombre, & que l'on diuiſe les produis l'vn par l'autre, il en viendra le meſme quotient, que de la diuiſion des nombres propoſez auant la multiplication. Par exemple, les nombres de la diuiſion eſtans 30. & 5. ſi on les multiplie tous deus par 4. les produis ſeront 120. & 20. deſquels ſi on diuiſe 120. par 20. le quotient eſt 6. qui eſt auſſi celuy de 30. diuiſé par 5. De meſme ayant à diuiſer R.180 + 6. par R.120 — 4. ſi on les multiplie tous deus par R.120 + 4. les produis de cete multiplication qui ſont 4. & 64 + R.3920. doiuent doner meſme quotient ſi on diuiſe le plus grand par le moindre, que ſi on diuiſoit en efet R.180 + 6 par R.120 — 4.

Pour ce qui eſt des preceptes des ſignes + & — leur verité ſe reconoitra par cet exemple des nombres vulgaires, les multipliant come s'ils eſtoient irrationaus, où il ſe voit que



20 — 6. qui eſt 14. multiplié par par 12 — 8. c'eſt à dire 4. done pour produit 56. de meſme que ſi on auoit multiplié directement 14. par 4.

De plus, ces régles de multiplication & de diuiſion ſe prouuent auſſi l'vne l'autre, de meſme qu'aus nombres vulgaires, come il eſt aiſé à éprouuer.

De l'extraction des racines quarées des Binomes & des Resídus.

CHAP. VII.

NOVS avons apelé iuſques ici Binomes & Reſidus, tous les nombres qui ſont compoſez de deus termes numeraus acouplez par les ſignes de + & de — lors que l'addition & la ſouſtraction ne s'en peuuent faire autrement ſelon la façon de parler ordinaire des Aritmeticiens: mais ſelon Euclide, il n'y a que ceus qui ſont compoſez ou de deus racines ſimples du premier degré radical R., ou d'vn nombre vulgaire & d'vne R., de ſorte que tous ceus qui auront quelque terme marqué d'vn autre caractere, tels que ceus cy R/8 + R/2. R/24 + 2. ne ſont pas Binomes ſelon ſa doctrine, mais ces autres ſeulement R.20 + 2. R.24 + R.2, &c.

Et apliquant ſes demonſtrations aus nombres irrationaus, on peut former les ſis eſpeces de nombres Binomiaus & Reſiduels, de meſme qu'il enſegne l'inuention de ſis eſpeces de lignes Binomiales & d'Apotomes. Car la diference des quarez des noms a pour racine vn nombre qui eſt ou comenſurable ou incomenſurable au plus grand nom.

Supoſant premierement que le côté de la diference des quarez ſoit incomenſurable au plus grand nom,

Si le plus grand nom eſt vn nombre vulgaire, le Binome ſera du premier ordre, ou premier Binome, tel qu'eſt 10 + R.96. car le plus grand eſt vn nombre vulgaire, & la diference des quarez eſt 4. dont le côté 2. eſt comenſurable a 10.

Si le moindre nom eſt vn nombre vulgaire, ce ſera le ſegond Binome. Par exemple R.45 + 5. a pour moindre nom le nombre 5: & la diference des quarez eſt 20. dont le côté eſt comenſurable à R.45: car R.45. & R.20, ſont en meſme proportion que 3. & 2.

Si tous les deus noms ſont irrationaus, on aura le 3e Binome. Ainſi R.24 + R.18. eſt du 3e ordre de Binomes, parce que R.6. côté de la diference des quarez, eſt comenſura.

ble à R24.

Supoſant maintenant que le côté de la diference des quarez ſoit incomenſurable au plus grand nom.

Si le plus grand nom eſt vn nombre ordinaire, ce ſera la 4e eſpece de Binome, tel qu'eſt 6 + R12.

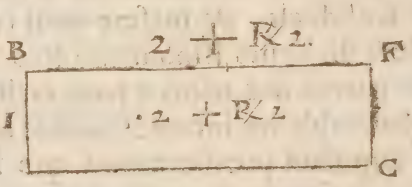
Si le moindre nom eſt vn nombre ordinaire, le Binome ſera de la 5e eſpece, come R20 + 4.

Et ſi tous les deus noms ſont irrationaus, ce ſera la 6e eſpece, come R15 + R5.

Le meſme ſe doit entendre des Reſidus, leſquels ſe forment par le moyen des Binomes, en changeant le ſigne + en celuy de —. Et ainſi on aura pour premier Reſidu 10—R96. pour ſegond R45—5. &c.

L'inuention des vns & des autres eſt enſegnée en la 43. propoſition, & aus cinq ſuiuantes, ſans qu'il ſoit beſoin d'en parler icy.

Chés Euclide les mots de Binome, & d'Apotome ou Reſidu, ne ſignifient que des lignes droites, mais les nombres irrationaus peuuent deſigner auſſi des ſuperficies. Car ſi on ſupoſe que la ſuperficie BC, ait pour longueur 2 + R2. & pour largeur 1. la ſuperficie BC, ſera encores 2 + R2, parceque l'vnité ne multiplie ni ne diuiſe point.



Et c'eſt pour cete raiſon qu'on enſegne l'extraction des racines quarées des Binomes & des Reſidus, laquele en lignes n'eſt autre choſe que l'inuention d'vne moyene proportionele entre les côtez inégaus d'vn plan Binomial, le quaré de cete moyene eſtant egal au meſme plan. Et cete inuention eſt, come i'ay déja remarqué, apelée par Steuin extraction de racine quarée de la ligne Binomiale BF, & cela fort mal à propos, puiſque la racine cherchée ne produira pas la ligne BF, mais vn quaré égal à BC.

Cete extraction de racines depend du 9e. Lem. & de la 49. propoſition auec les ſuiuantes, parce que du 9e Lem. on colige que le produit de deus nombres eſt moyen propor-

tionel entre leurs quarés : & la 49. propoſition auec les cinq ſuiuantes nous aprend que le plus grand nom d'vn Binome, eſt egal au compoſé des quarés des noms de ſon côté, & que le moindre eſt egal au double de leur produit. Et partant le Binome $6 + \sqrt{20}$. eſtant propoſé, il eſt certain premierement que les quarés des noms de ſon côté, ioins enſemble font 6 : Secondement, que $\sqrt{5}$. qui eſt moitié de $\sqrt{20}$. eſt le produit de la multiplication des meſmes noms : & en 3e lieu, que ſi on diuiſe 6. en ſorte que le produit de ſes parties, ſoit egal à 5. quaré de la moitié de $\sqrt{20}$. on aura les quarés de ces noms, & ſi on en extrait les racines, les noms meſmes. De tout cecy ſe forme ce precepte.

Que le plus grand nom du Binome propoſé ſoit diuiſé en ſorte que le produit de ſes parties ſoit egal au quaré de la moitié du plus grand nom : & les côtez des meſmes parties iointes par le ſigne +, ſeront la racine cherchée.

Or cete diuiſion eſt enſegnée au 5. Lem. de notre 10. liu. apres la 15. prop. & ne conſiſte qu'à adiouter & ſouſtraire de la moitié du nombre à diuiſer, le côté de la diference des quarés des moitiés. Ainſi le meſme Binome $6 + \sqrt{20}$. eſtant propoſé pour en extraire la racine, parce que les quarés des moitiés ſont 9. & 5. dont la diference eſt 4. ſi on adioute 2. côté de 4. à 3. moitié de 6. on aura 5. pour le plus grand nombre de cete diuiſion : & ſi de 3. on ote 2. le reſte 1. ſera le moindre ; car 5. & 1. produiſent encores 5. qui eſt le quaré de $\sqrt{5}$. moitié de $\sqrt{20}$. Si donc on prend les racines de 5. & 1. & qu'on les ioigne par le ſigne +, $\sqrt{5} + 1$. ſera la racine de $6 + \sqrt{20}$.

On peut encores extraire les racines des Binomes par la regle ſuiuante.

Que la racine de la diference des quarés ſoit adioutée & ſouſtraite du plus grand nom. Et la racine de la moitié de cete ſome eſtant iointe par le ſigne +, à la racine de la moitié de ce reſte, ou aura la racine du Binome propoſée.

De cete ſorte ſi on veut extraire la racine du Binome $10 + \sqrt{96}$. ayant pris la diference des quarés 100. & 96. laquele eſt 4. ſi on adioute 2. coté de 4. à 10. la ſome ſera 12. & ſi on le ſouſtrait, le reſte ſera 8. La racine quarée de la

moitié de 12. eſt R6. qui iointe à 2. racine de la moitié de 8. donera R6 + 2. pour racine quarée de 10 + R96.

Le premier Binome a touiours pour coté vn nombre Binomial, come il ſe voit aus deus derniers exemples des Binomes 6 + R20. & 10 + R96. qui ſont du premier ordre, & ont pour cotez R5 + 1. & R6 + 2 : mais tous les autres Binomes ont pour côtez des nombres qui ſelon la doctrine d'Euclide ont d'autres denominations.

Car le ſegond Binome a pour racine vn nombre qui eſt premier Bimedial, c'eſt à dire qui eſt compoſé de deus R/. incomenſurables quant à elles, mais dont les quarez ſont comenſurables, & le produit Rationel: car le ſegond Binome R48 + 6. a pour côté R/27 + R/3. dont les quarez R27. & R3. ſont en proportion triple; & leur produit eſt 3. Et l'extraction s'en fera ſelon l'vne des deus regles, car ſelon la premiere les quarez des moitiez ſont 12. & 9. dont la diference eſt 3. de laquele le coté, R3. adiouté à la moitié de R/48. qui eſt R12. la ſome ſera R27. & en eſtant oté, le reſte ſera R3. & ainſi les côtez de R27. & de R3. ioins enſemble font pour racine de 48 + R6. le nombre premier Bimedial R/27 + R/3.

Le 3e. Binome a pour coté vn nombre apelé ſelon Euclide, ſegond Bimedial, c'eſt à dire qui eſt compoſé de R/. incomenſurables, mais dont les quarez ſont comenſurables, & le produit irrationel. Tel eſt le nombre R/12 + R/3. coté du 3e Binome R27 + R24. dont les quarés ſont en proportion double, & le produit eſt R6.

Le 4e Binome a pour côté vn nombre Majeur, c'eſt à dire, que les quarés de ſes noms ſont incomenſurables, que le compoſé des meſmes quarés eſt Rationel, & le produit, irrationel. Car ſi on propoſe le 4e Binome 8 + R24. la diference des quarés de ſes noms ſera 40. dont le coté adiouté & ſouſtrait de 8. la ſome & le reſte ſeront 8 + R40. & 8 — R40. dont les moitiez ſont 4 + R10. & 4 — R10. Et parce que les cotez de ces nombres ne ſe peuuent exprimer que par le ſigne R. en diſant que c'eſt racine du nombre 4 + R10. ou d'autres ſemblables: nous les écrirons ainſi R(4 + R10) & R(4 — R10) leſqueles eſtans iointes par

par + , on aura pour coté de 8 + R24. le nombre Majeur R (4 + R10) + R (4 — R10) dont les noms ont leurs quarez 4 + R10. & 4 — R10. incomenſurables, mais le compoſé des meſmes quarez eſt 8. parce que + R10. & — R10. ſe détruiſent l'vn l'autre, & leur produit eſt R6. ſuiuant les regles de la multiplication, que nous en donerons au chap. ſuiuant.

Le côté du 5e. Binome eſt vn nõbre Rationel-Moyen, c'eſt à dire que les quarez de ſes noms ſont incomenſurables, que le compoſé des meſmes quarez eſt irrationel, & le produit des noms, rationel. Come on peut voir au 5e. Binome R40 + 4. dont le côté ſe trouuera eſtre R (R10+R6) + R (R10 — R6) leſquels noms ont pour ſome de leurs quarez R40. & pour produit de leur multiplication, 2.

Le 6e. Binome a pour coté vn nombre Double-Moyen, c'eſt à dire qui a des noms dont les quarez ſont incomenſurables; & que le compoſé des meſmes quarez, & le produit des meſmes noms ſont nombres irrationaus & incomenſurables. Car le 6e. Binome R48 + R8. a pour côte R (R12+R10) + R (R12 — R10) deſquels noms le compoſé des quarez eſt R48. & le produit R2. nombres incomenſurables, qui ſont en proportion de R24. à 1.

Or on voit par ce que nous venons de dire de ces extractions, que les racines ou côtez des trois premiers Binomes, s'expriment aſſez comodément, mais que les racines des trois derniers Binomes ſont plus obſcures & moins intelligibles, que ſi on les deſignoit ſimplement en diſant que ce ſont les racines de tels ou tels Binomes; car on conçoit plus aiſément la Racine vniuerſele du Binome R40+ 4. qui s'écrit de cete ſorte R (R40+4) pour doner à entendre que le Binome R40 + 4 eſtant quaré, on veut exprimer ſa racine; que non pas ſi on diſoit Racine vniuerſele de R10+R6. plus Racine vniuerſele de R10 — R6. que nous auons exprimée par ces caracteres R (R10+R6) + R (R10 — R6) puiſqu'il y a autant de pene à conceuoir la racine de chacune de ces parties R10 + R6. & R10 — R6. que la racine du Binome entier R40 + 4 : & que les quarez des meſmes parties eſtant encores des Binomes & des Reſidus, on

pouroit auec autant de raiſon demander l'extraction de leurs racines, que de celle du Binome meſme. Que ſi elle ne peut eſtre exprimée que par ce caractere R(R10+R6) ſans faire vn progrez à l'infiny, extrayant encores la racine de R10 + R6. on poura par la meſme raiſon exprimer tout d'vn coup la racine de R40+4. en diſant que c'eſt R(R 40 + 4) c'eſt à dire Racine totale du Binome R40+4. ſans en faire d'autre extraction. C'eſt ce qui a fait dire à quelques Aritmeticiens, qu'il n'y auoit que les trois premiers Binomes qui fuſſent quarez, & que les autres n'auoient point de racine quarée, come eſtant bien plus comode & plus naturel de les exprimer ſimplement par leurs quarez que par cete extraction. Neanmoins il eſt neceſſaire pour l'intelligence de beaucoup de propoſitions de notre 10e. liure, de faire cete extraction, afin de ſauoir les noms ou parties des lignes Majeures, Rationeles-moyenes, & Doubles-moyenes, qui ſont lignes irrationeles compoſées, dont les noms ſont confondus en les exprimant par leurs quarez : car ſi pour deſigner vne ligne Majeure par nombres, ie dis que c'eſt le côté du Binome 8 + R24. ou R(8+R24) il eſt certain que ces noms ne ſont pas diſtinguez, puiſque par ce moyen on n'explique autre choſe, ſinon que c'eſt vne ligne qui a pour quaré 8 + R24 : mais lors que l'on vient à dire que c'eſt R(4+R10) +R(4 — R10) on conoît que ſon plus grand nom eſt R(4+R10) & que le moindre eſt R(R4 — R10). Et ainſi cete ſorte d'extraction n'eſt pas ſi ridicule qu'on ſe pouroit imaginer : quoy que pour les operations d'Aritmetique, come l'addition, la multiplication, &c. il ſoit plus comode de deſigner ces racines par leurs quarez.

Tout ce que nous auons dit des Binomes pour l'extraction des racines, ſe doit auſſi entendre des Reſidus, en changeant ſeulement apres l'extraction faite, le ſigne +, en celuy de —. Car de meſme que du Binome il ſe fait vn Reſidu, interpoſant entre les noms le ſigne —, au lieu que les Binomes ont celuy de +, auſſi la racine d'vn Binome ſe change en celle de ſon Reſidu par l'interpoſition du ſigne — à la place de celuy de +. Et ainſi le Reſidu 6 — R20. ſe trouuera auoir pour côté R5 — 1. & le Reſidu 8 — R24. aura pour coté R(8 — R24) ou R(4 + R10) — R(4 — R10.) & ainſi des autres.

De l'Algorime de Racines vniuerseles.

CHAP. VIII.

LEs racines vniuerseles sont les côtez des trois derniers Binomes & Residus, dont nous venons de parler, & que nous auons dit ne se pouuoir expliquer plus comodement que par leurs quarés. On les apele racines vniuerseles, parce qu'elles ne sont pas racines de nombres simples, mais de plusieurs nombres ioins ensemble, ou plutôt de nombres composez. Les auteurs les expriment diuersement pour le regard du caractere, les vns se contentent de marquer vn point apres le signe Radical, voulant doner à entendre que tout ce qui est écrit apres le point, est le quaré de la racine dont est question, come ℞. 10 + ℞50. pour designer la racine du Binome 10 + ℞50. D'autres apres le signe ℞. metent le mot de Binome abregé en cete sorte ℞bin. ℞45 + 3. mais il me semble que la maniere de les écrire dont se sert Clauius, est la moins suiete à erreur, & pour cete raison nous continuërons de nous en seruir comme nous auons déja comencé au Chap. preced. qui est d'enfermer le Binome entre deus lignes courbes comme vne parentese.

La multiplication & la diuision de ces racines, se font en prenant les quarez des nombres proposez, & faisant leur multiplication & diuision selon les preceptes des racines simples & des Binomes & Residus; puis l'operation estant acheuée, il faut prendre la racine vniuersele du produit ou du quotient.

Ainsi voulant doubler ou multiplier par 2. cete Racine ℞(10 + ℞40) ie prens le quaré de 2. qui est 4; & le quaré de la racine vniuersele qui est 10 + ℞40. & faisant la multiplication come il a esté enseigné au 4. Chap.

10 + ℞40.
4
40 + ℞640.

en multipliant ℞40 par 4. c'est à dire par ℞16. & puis 10.

auſſi par 4. i'ay pour produit 40 + ℞640. dont la racine ſauoir ℞(40 + ℞640) eſt le produit de ℞(10 + ℞40) par 2.

En voulant multiplier ℞(℞48 + 4) par ℞(2 — ℞3) ſi on multiplie les quarez l'vn par l'autre, on aura pour produit ℞48 — 4.

℞48 + 4.
2 — ℞3.

— 12 — ℞48.
℞192 + 8.

℞48 — 4.

parce que ℞192. eſtant double de ℞48. ſi de ℞192. on ôte ℞48. qui a le ſigne —, reſtera ℞48: puis de 12. otant encores 8. à cauſe de la diuerſité de leurs ſignes, le reſte ſera —4. Prenant donc la racine vniuerſele de ℞48 — 4. on aura pour produit de ℞(℞48 + 4) par ℞(2 — ℞3) le nombre ℞(℞48 — 4.)

Nous donerons pour exemple de la diuiſion, la preuue de cete meſme multiplication, parce que ces deus regles ſe prouuent toujours l'vne l'autre; car puiſque ℞(℞48 + 4) multipliée par ℞(2 — ℞3) produit ℞(℞48 — 4) il faudra neceſſairement que le produit diuiſé par vn des nombres multipliez, done l'autre pour quotient, c'eſt à dire que ℞(℞48 — 4) diuiſé par ℞(℞48 + 4) ait pour quotient ℞(2 — ℞3).

Or cete diuiſion ſe fera en la maniere ſuiuante. Les quarez des nombres de la diuiſion ſont ℞48 — 4. & ℞48 + 4. Pour auoir vn diuiſeur ſimple, ie multiplie ſuiuant la regle du 4. Chap. ℞48 + 4. par ſon Reſidu ℞48 — 4. & vient pour produit 32. qui eſt le nouueau diuiſeur. Et multipliant auſſi ℞48 — 4. par le meſme Reſidu, c'eſt à dire par luy-meſme, le produit eſt 64 — ℞3072. pour nouueau nombre à diuiſer: puis diuiſant 64 — ℞3072. par 32. vient pour quotient 2 — ℞3.

64 — ℞3072 | 2 — ℞3.
32 — ℞768

dont la racine vniuerſelle eſt ℞(2 — ℞3.) Et partant la multi-

plication a eſté bien faite, & conſequemment auſſi cette diuiſion, puiſque chacune de ces regles eſt la preuue de l'autre.

Lors qu'vne racine vniuerſele eſt diuiſee en ſes noms, & qu'on la veut multiplier par elle meſme pour auoir ſon quaré; cete multiplication ſe fera aizément par la 4e, 2e, en adjoutant enſemble les quarez des parties & le double de leur produit. Ainſi voulant auoir le quaré de ce nombre R (6 + R10) + R (6 — R10) les quarez des parties ſont 6 + R10. & 6 — R10. dont la ſome eſt 12. par ce que + R10, & — R10. ſe détruiſent l'vn l'autre. Et pour multiplier R (6 + R10) par R (6 — R10.) je prens ſuiuant le dernier precepte leurs quarez, que je trouue eſtre vn Binome & vn Reſidu de meſmes noms. Et parce que la multiplication d'vn Binome & d'vn Reſidu de meſmes noms ſe fait en prenant la diference des quarez des noms par la regle du 4. Chap. je ſouſtrais 10. quaré du moindre nom de 36. quaré du plus grand, & reſte 26. dont la racine eſt R 26. & partant le produit de la multiplication R [6 + R10] par R [6 — R10] eſt R 26. dont le double eſt R104. qui adioutée à 12 ſome des quarez, le quaré de R [6 + R10] + R [6 — R10] ſe trouuera eſtre 12 + R104.

L'addition & la ſouſtraction des racines vniuerſeles, ne ſe peuuent faire ordinairement que par les ſignes + & — ſi elles ne ſont comenſurables, c'eſt à dire ſi leurs quarez n'ont proportion de nombre quaré à nombre quaré, ce qui s'éprouuera par la diuiſion de meſme qu'aus racines ſimples. Par exemple R [16 + R96] & R [36 + R486] ſont comenſurables, parce que le quotient de leur diuiſion eſt $\frac{1}{3}$ qui veut dire que la moindre eſt 2. de telles parties dont la plus grande eſt 3. & partant ſi on diuiſe R [16 + R96] par 2. le quotient ſera le nombre qui eſt contenu 2. fois en l'vne & 3. en l'autre, ſauoir R [4 + R6.] Et parce que l'vne contient 3. fois cete derniere racine, & l'autre 2. leur ſome doit eſtre 5. fois R [4 + R6] laquele par conſequent eſtant multipliée par 5. ſelon le precepte que nous en auons doné, le produit ſera le quaré de la ſome cherchée, & la racine, la ſome meſme laquele ſe trouuera par ce moyen

4 + R 6.
25. R 625.

100 + R 3750.

estre R [100 + R 3750] en multipliant 4 + R 6. quaré de R [4 + R 6] par 25. quaré de 5. & prenant la racine du produit.

Par la mesme voye on pourra soustraire l'vne de l'autre; car puisque l'vne est 3. de telles parties, dont l'autre est 2. leur diference doit estre 1. & parce que l'vne de ces parties a esté trouuée R [4 + R 6] ce sera leur diference. Qu'il faille encores soustraire R [8 + R 32] de R [50 + R 1250] parce que le quotient de leur diuision est $\frac{2}{5}$, la plus grande est 5. des mesmes parties dont la moindre est 2. & partant diuisant R [50 + R 1250] par 5. le quotient doit estre vne de ces parties sauoir [2 + R 2], & parce que de 5. otant 2 le reste est 3. c'est à dire 3. fois R [2 + R 2,] si on multiplie cette racine par 3. le produit R [18 + R 162] sera la diference des racines proposées. Ces preceptes sont entierement semblables à ceus des racines simples.

Les racines vniuerseles des Binomes & des Residus de mesmes noms, se peuuent adiouter & soustraire en ioignant ensemble leurs quarez & le double de leur produit par + ou par —, & prenant la racine vniuerselle de tout. Ainsi R [3 + R 2,] adioutée à R [3 — R 2] la some est R [6 + R 28] & leur diference R [6 — R 28] ce qui se fera par le moyen de ce qui a esté dit en ce Chapitre mesme.

Les autres racines vniuerseles ne se peuuent adiouter ny soustraire, que de cette sorte R [R 8 + 2] + R [R 3 + 1,] & R [10 + R 40] — R [2 — R 2,] &c.

Des fractions irrationeles.

CHAP. DERNIER.

ENCORES que ces fractions n'ayent aucune dificulté, ſi on ſe ſouuient des preceptes des fractions vulgaires ou rationeles, & de ceus des nombres irationaus entiers: neanmoins pource qu'on s'y pouroit aiſément tromper, nous ne laiſſerons pas de dire vn mot des fractions irrationeles ſimples, qui fera aſſez iuger des compoſées & diminuées.

I. Pour les nombrer, il a eſté déja dit, que quand le ſigne radical eſt au milieu des deus termes, il ſe raporte à tous les deus, & qu'autrement il ne s'entend que de celuy dont il eſt proche. Ainſi R/ $\frac{2}{5}$ ſignifie que R/ 2. eſt diuiſée par R/5. Mais R/ $\frac{3}{7}$ veut dire que R/3. eſt diuiſé par 7. & $\frac{4}{R/15}$. que 4. eſt diuiſé par R/15. On reduira ces deus dernieres fractions à vne fraction qui ait le ſigne Radical au milieu, en prenant le quaré du terme qui n'a point de ſigne Radical, & la premiere ſe trouuera eſtre R/ $\frac{3}{49}$. & la deuſiéme, R/ $\frac{16}{15}$.

II. Quand vn nombre irrationel eſt compoſé d'vnitez & de fraction, il en faut faire vne ſeule fraction, de meſme qu'aus nombres vulgaires. Et ainſi R/ $4\frac{2}{3}$ eſt meſme choſe que R/ $\frac{14}{3}$.

III. La reduction aus moindres termes, la multiplication, & la diuiſion, ſe font come aus fractions rationeles. Mais il faut, auant que de faire aucune de ces regles, que toutes les fractions propoſées ayent le ſigne radical au milieu de leurs termes, & s'ils ne l'ont pas, en faire la reduction, come il a eſté enſegné au premier article. Et partant ſi on veut reduire aus moindres termes $\frac{R/20}{8}$. on aura R/ $\frac{5}{16}$. La multiplication de R/ $\frac{1}{4}$ par R/ $\frac{2}{3}$ produira R/ $\frac{6}{12}$ ou R/ $\frac{1}{2}$. La diuiſion de R/ $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{R/3}$. donera pour quotient R/ $\frac{12}{10}$ ou R/ $\frac{6}{5}$.

IIII. La multiplication & la diuiſion preſupoſent, de meſme qu'aus nombres entiers, que les fractions ſoient de meſme denomination de nombres irrationaus: & ſi elles n'ont

pas meſme denomination il les y faudra reduire de meſme que les nombres entiers, come il ſe voit en ces deus fractions R/ $\frac{3}{8}$. R/ $\frac{5}{6}$. dont cete derniere eſtant reduite au ſigne R/ eſt R/ $\frac{15}{16}$.

V. Pour faire l'addition & la ſouſtraction, il faut reduire les fractions propoſées à meſme denominateur, de meſme qu'aus fractions rationeles. Cete reduction eſtant faite, ſi les numerateurs ſont comenſurables, il faut les adiouter enſemble, ou ſouſtraire le moindre du plus grand ſelon les regles des rationaus & irrationaus entiers, & doner à la ſome ou au reſte le denominateur comun. Par cete raiſon ſi on veut adiouter enſemble R/ $\frac{2}{3}$ & R/ $\frac{8}{17}$. les ayant reduites à meſme denomination, & pris les moindres termes, les nouuelles fractions R/ $\frac{18}{27}$. & R/ $\frac{8}{27}$. & parce que les numerateurs R/18. & R/8. ſont comenſurables, eſtans entre eus come 3. à 2. j'adiouste enſemble R/18. & R/8. dont la ſome eſt R/50. qui eſt le numerateur de la ſome, & le denominateur R/27. & partant la ſome de ces deus fractions eſt R/ $\frac{50}{27}$ ou R/1 $\frac{23}{27}$. Et ſi de R/ $\frac{2}{3}$. on vouloit ôter R/ $\frac{8}{27}$. le reſte ſeroit par la meſme raiſon R/ $\frac{2}{27}$. De meſme voulant adiouter R/ $\frac{9}{10}$. & R/ $\frac{1}{5}$ enſemble, ces fractions eſtans reduites à meſme denomination & aus moindres termes, ſeront R/ $\frac{9}{10}$ & R/ $\frac{4}{10}$. dont les numerateurs ſont R/9. & R/4. c'eſt à dire 3. & 2. leſquels adioutez enſemble font 5. qui en racines eſt R/25. & ainſi la ſome ſera R/ $\frac{25}{10}$. en otant l'vne de l'autre le reſte ſera R/ $\frac{1}{10}$.

VI. Si les numerateurs ſont incomenſurables, l'addition & la ſouſtraction ſe font par les ſignes + & —, come en ces exemples R/ $\frac{3}{4}$ + R/ $\frac{2}{3}$. R/ $\frac{4}{5}$ — R/ $\frac{1}{2}$. &c. qui ſont fractions Binomiales & Reſidueles.

Cete Aritmetique pratique des nombres irrationaus, eſt ſufiſante pour faire l'aplication de ces nombres à toutes les propoſitions du 10e. *liure. Encores qu'elle ne contiene rien qui ne ſoit auſsi ailleurs, i'ay creu que ce ſeroit vn ſoulagement aus ſtudieus de la trouuer icy, ſans eſtre obligez d'auoir recours aus autres Auteurs, qui ſont ordinairement aſſez obſcurs & ennuyeus en cette matiere.*

LE

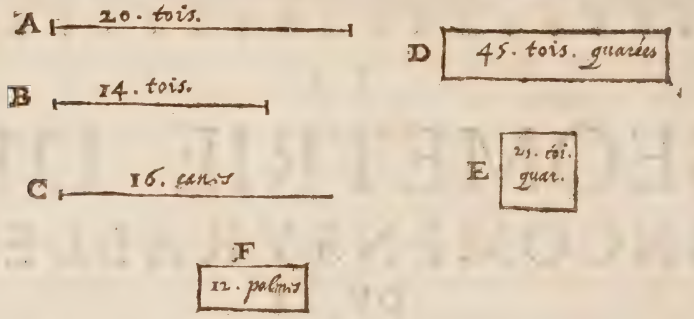
LA GEOMETRIE DES INCOMENSVRABLES, OV LE DISIEME LIVRE DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. LEs grandeurs comensurables sont celles qui sont mesurées d'vne mesme mesure comune.

Cete definition, que i'ay deja expliquée au premier chap. de la 2e. part. de l'Introd. conuient à toutes les trois especes de grandeurs, encores qu'il ne se parle en ce 10e. liure que des deus premieres especes, qui sont la ligne & la superficie, lesqueles y sont considerées entant qu'elles sont comensurables ou incomensurables. Les comensurables sont celles qui sont mesurées d'vne mesme mesure comune, telles que sont icy les lignes A, B, la premiere estant supoſée de 20. toises Parisienes, & l'autre de

14. leſqueles ſont comenſurables, pource qu'vne meſme meſure, ſauoir la toiſe de Paris, les meſure toutes deus. Mais ſi on pro-

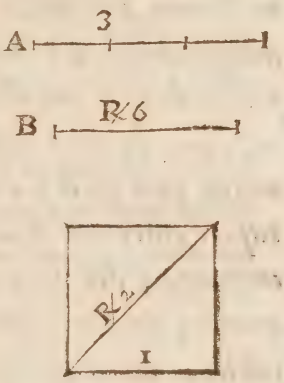


poſoit la ligne C, de 16. canes Romaines, on ne pouroit pas aſſeurer qu'elle fut comenſurable aus lignes A, B, come eſtant meſuree d'vne meſure diferente de la meſure comune d'A, B. Il en eſt de meſme des autres grandeurs, come il ſe voit aus ſuperficies D, E, F, dont les deus premieres ſont comenſurables, pour eſtre l'vne de 45. toiſes quarées, l'autre de 25. des meſmes toiſes, au lieu que la ſuperficie F, ne leur eſt pas neceſſairement comenſurable, eſtant compoſée de 12. palmes quarez, qui eſt vne autre ſorte de meſure. Sur quoy il faut remarquer que les grandeurs ſont meſurées par des grandeurs de meſme eſpece, les lignes par les lignes, & les ſuperficies par les ſuperficies, & non pas les ſuperficies par les lignes, parce qu'elles n'ont aucune proportion les vnes aus autres.

II. Les grandeurs incomenſurables, ſont celles qui ne ſont meſurées d'aucune comune meſure.

De meſme que les grandeurs comenſurables ſont celles qui ſont meſurées d'vne meſme meſure, auſsi les incomenſurables ſont celles qui n'ont aucune meſure comune, qui les meſure exactement, c'eſt à dire, qu'il ne ſe peut trouuer aucune gran-

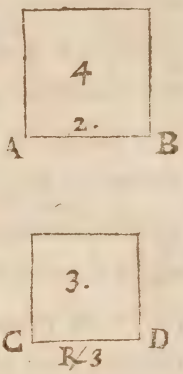
deur quelle qu'elle puiſſe eſtre, qui ſoit precisément contenüe en chacune d'elles. Ces termes ſont intelligibles, mais le ſens en ſeroit neanmoins aſſez dificile à comprendre, ſans le ſecours de la Geometrie, veu la pene qu'on auroit de ſe perſuader qu'il y eut des grandeurs de meſme eſpece, qui ne tombaſſent pas ſous vne meſme meſure. Auſsi eſt-il tres-certain que s'il s'en faloit raporter à la veüe, on les iugeroit toutes comenſurables, puiſqu'on en pouroit prendre vne ſi petite partie qu'elle ſembleroit eſtre leur comune meſure. Mais nous auons deſia comencé de prouuer en l'introduction, qu'il y a pluſieurs ſortes de grandeurs incomenſurables, & nous le reconoitrons encores plus clairement dans la ſuite de ce liure. Telles ſont les lignes A, B, dont l'vne contient 3. parties, à comparaiſon deſqueles l'autre eſt R2 6. *parce qu'on ne peut trouuer aucune ligne pour petite qu'elle puiſſe eſtre, qui ſoit la comune meſure de toutes deus, come nous ferons voir en quelque façon par experience des nombres ſur la 2e. propoſition. Tels ſont encor le coté d'vn quaré & ſon diametre, deſquels le premier eſtant poſé 1. le diametre ſera* R2 ; *& vne infinité d'autres.*



III. Les lignes droites comenſurables de puiſſance, ſont celles dont les quaréz ſont comenſurables.

Quoy que les grandeurs en general ne ſoient comenſurables, qu'alors qu'elles ont vne meſure comune: Euclide vſe neanmoins d'vne diſtinction pour le regard des lignes, qui n'a point de lieu aus autres grandeurs, diſant qu'il y en a de comenſurables de puiſſance. Les comenſurables de longueur, ſont celles qui ſont meſurées d'vne meſure comune, come nous

auons dit generalement des autres grandeurs : les comenſurables de puiſſance ſont celles qui, ſoit qu'elles meſmes ſoient comenſurables ou incomenſurables, ont leurs quarez meſurez d'vn meſme eſpace, car le quaré d'vne ligne eſt apelé ſa puiſſance, & vne ligne eſt dite pouuoir autant que ſon quaré eſt grand. Telles ſont les lignes A B, C D, dont les quarez ſont comenſurables, le quaré d'A B, eſtant 4. des meſmes parties dont celuy de C D, eſt 3. quoy que pour leurs longueurs, elles ſoient incomenſurables, l'vne eſtant en nombres 2. & l'autre R/ 3.

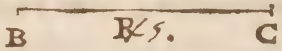


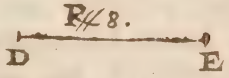
Cette diuiſion eſt bone & legitime, quoy qu'en puiſſe dire Steuin, & comode pour expliquer la nature des lignes comenſurables. Et ne faut point aleguer que c'eſt auſſi mal parler de dire que des lignes ſont comenſurables de puiſſance, come de dire que la circonference eſt droite en ſon diametre, puis qu'il y a bien de la diference, & peu ou point de raport entre ces deus façons de parler. Car en la premiere on compare des lignes auec des lignes, & les quarés auec les quarés ; & parce que les vnes ont leurs longueurs comenſurables, & d'autres leurs quarez ſeulement: il a eſté à propos de chercher des termes pour exprimer ces deus ſortes de lignes comenſurables ; au lieu qu'en diſant que la circonference eſt droite en ſon diametre, on ne compare pas vne circonference à vne autre circonference, ny vn diametre à vn autre diametre : & parce qu'il n'y a point de circonference dont le diametre ne ſoit droit, ce ſeroit vne choſe ridicule de dire qu'elle eſt droite en ſon diametre, puiſqu'il n'y en a point qui ſoient autrement. Que s'il y auoit auſſi des cercles dont le diametre fut courbe, alors on pouroit diuiſer

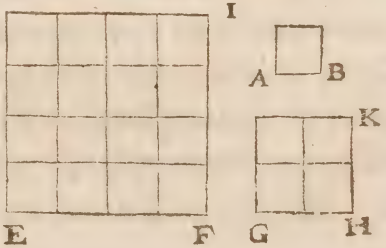
les cercles, en cercles drois de diametre, & courbes de diametre: & ie ne croy pas que ce fut parler plus improprement, que de dire qu'il y a des villes grandes de peuple, & d'autres qui sont grandes de circuit. Ie say aussi bien que Steuin, qu'en disant que des lignes sont incomensurables entre elles, & que leurs quarez sont comensurables: on explique la nature des lignes & des quarez, mais ce seroit dire en beaucoup de paroles ce qui se peut enoncer en bien peu par le moyen de notre diuision. C'est pourquoy sans nous areſter à cete reprehension de Steuin, qui s'est montré aussi peu iudicieus en blâmant cete diuision, qu'en beaucoup d'autres opinions particulieres, que nous auons refutées: nous continüerons de dire auec Euclide, qu'il y a des lignes comensurables de longueur, & d'autres qui sont comensurables de puissance.

IV. Les lignes droites incomensurables de puissance sont celles dont les quarez ne sont mesurez d'aucune comune mesure.

Ces paroles n'ont aucune dificulté apres ce que nous auons dit sur la precedente definition. Nous donerons pour exemple les lignes B C, D E, qui estans en nombres ℞ 5. & ℞ 8. ont pour quarez 5. & ℞ 8. lesquels sont incomensurables entre eus. Il faut remarquer sur ces deus dernieres definitions que toutes lignes comensurables de longueur, le sont aussi de puissance, pource que le quaré de leur comune mesure, est aussi la mesure de leurs quarez, come il se voit aus lignes E F, G H, dont les quarez E I,







G K, ſont meſurées par le quaré de leur meſure comune AB. Et neanmoins toutes lignes comenſurables de puiſſance, ne le ſont pas touſiours de longueur, dont nous auons doné vn exemple en la definition precedente. Au contraire, les lignes incomenſurables de longueur, ne ſont pas neceſſairement incomenſurables de puiſſance; mais celles qui ſont incomenſurables de puiſſance, le ſont auſsi touiours de longueur, come on peut coneſtre par les meſmes exemples. C'eſt pourquoy les lignes dont les quarez ſont comenſurables, & non pas les lignes meſmes, ſe doiuent apeler comenſurables de puiſſance ſeulement; mais pour celles qui ſont comenſurables de longueur, le mot de (ſeulement) ne s'y doit pas adiouter, puiſqu'il eſt impoſsible qu'elles ne le ſoient auſsi de puiſſance. Par la meſme raiſon les incomenſurables de longueur dont les quarez ſont comenſurables, doiuent eſtre apelées incomenſurables de longueur ſeulement, mais les incomenſurables de puiſſance eſtans auſsi neceſſairement incomenſurables de longueur, ne peuuent pas eſtre dites incomenſurables de puiſſance ſeulement. Tout cela ſera mieus demontré par la 7 propoſition, dont nous deduirons pour Corolaires tout ce que nous venons de dire.

V. Cela eſtant ainſi, l'on demontre qu'vne ligne droite eſtant propoſée, on en peut trouuer vne infinité d'autres qui lui ſeront comenſurables & incomenſurables, les vnes de longueur, & les autres de puiſſance. Nous apelerons la propoſee, Ligne Rationele.

Puiſque ſelon les definitions precedentes, il y a des lignes comenſurables & incomenſurables de longueur & de puiſſance; il s'enſuit que toute ligne propoſée aura ſes comenſurables & incomenſurables de toutes les deus façons, dont les inuentions ſeront enſegnées en diuerſes propoſitions de ce liure, qui eſt ce qu'Euclide veut doner à entendre lors qu'il

dit que l'on demontre qu'à toute ligne proposée on en peut trouuer de comensurables & d'incomensurables. Or cete ligne proposée à laquele les autres seront comensurables ou incomensurables, est apelée par Euclide ῥητὴ Ritì, *come qui diroit dicible ou explicable, pource que sa grandeur est conüe, & se peut exprimer par vrays nombres Aritmetiques, tels que sont 3. 6. 7. &c. lesquels signifieront que cette ligne sera imaginée estre composée de 3. 6. ou 7. piés, palmes, toises, canes, ou de quelque autre fameuse & publique mesure telle qu'il nous plaira. Ce mesme mot de* Ritì, *a esté assez mal rendu par tous les traducteurs, qui l'ont traduit, Rationele; ce qui ne répond pas bien au Grec, quoy que d'ailleurs ils veulent peut estre signifier que cete ligne proposée estant conüe, tombe plus parfaitement sous le raisonnement, que les autres qui luy sont incomensurables de longueur. Quoy qu'il en soit, puisque le mot de Rationele est receu par tous les auteurs, & qu'il n'est presque plus possible de le changer, nous nous en seruirons aussi pour designer cete ligne.*

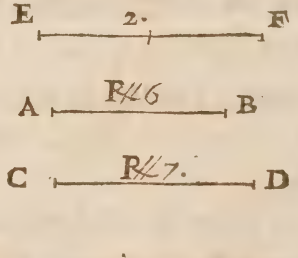
VI. Les lignes droites comensurables à la proposée, soit de longueur, soit de puissance seulement, seront aussi apelées Rationeles.

Chez les Aritmeticiens (si toutesfois on en excepte Steuin, & peut estre quelque autre) il n'y a que les nombres ordinaires composez d'vnitez qui soient Rationaus, tels que sont 6. 8. 10. &c. & non pas les suiuans R2 8. R2 15. &c. mais Euclide traitant des superficies, où il est necessaire de considerer la puissance des lignes, apele aussi Rationeles, celles qui sont comensurables de puissance seulemnt à la Rationele proposee, dont la quantité ne se peut exprimer par aucun nombre Aritmetique, ou vulgaire, mais seulement par ceus

que nous venons de dire R5. R7. *&c. leſqueles lignes ſont eſtimées Rationeles, à raiſon de leurs quarez. Or la diference qu'il y a entre ces lignes & celle de la precedente definition, eſt que celle là eſt apelée Rationele proposée, pour doner à entendre que c'eſt celle à qui on doit raporter toutes les autres qu'on veut former; mais celles-cy ſont Rationeles ſeulement.*

VII. Et celles qui luy ſont incomenſurables, irrationeles.

Le mot Grec ἄλογος Alogos, *n'eſt pas mieus traduit par les interpretes, que celuy de* Ritì, *dont nous auons déja parlé; celuy d'irrationel luy conuenant aſſez mal ſelon le ſens d'Euclide, lequel vouloit dire inexpliquable, & non pas irrationel, quoy qu'*Alogos *ſignifie l'vn & l'autre. Nous nous en ſeruirons neanmoins puiſque c'eſt vn terme receu & vſité, pour ſignifier les lignes qui ſont incomenſurables de longueur & de puiſſance à la propoſée. Telles ſont les lignes AB, CD, comparées à la ligne EF, laquele eſtant propoſée de 2. piés, les deus autres ſeront en meſme meſure* R4 6. *&* R4 7. *c'eſt à dire que leurs quarez ſont inexplicables, ſauoir* R6. *&* R7. *pource qu'ils ne peuuent eſtre autrement exprimez en nombres, ſi on les compare au quaré de la propoſée EF.*



VIII. Le quaré de la ligne propoſée ſera nomé Rationel.

Parce que le quaré de la ligne propoſée eſt expliquable par le quaré du nombre qui ſert à exprimer cete ligne, ainſi qu'il ſe voit en la figure de la 4e definition, la denomination de Rationel ſe doit doner à ce quaré par la meſme raiſon

ſon qu'elle eſt donée à ſon coté.

IX. Et ceus qui luy ſeront comenſurables, Rationaus.
X. Et ceus qui lui ſeront incomenſurables, irrationaus.

Come la ligne Rationele proposée fait denomer les autres Rationeles ou irrationeles, ſelon qu'elles luy ſont comenſurables ou incomenſurables; auſsi à l'égard de ſon quaré, les autres quarez doiuent eſtre tenus pour Rationaus, ou irrationaus, entant qu'ils luy ſont comenſurables ou incomenſurables. Ce qui ſe doit auſsi entendre de tous autres rectangles, qui luy ſeront comenſurables ou incomenſurables, puiſqu'on peut trouuer des quarez qui leur ſeront egaus.

XI. Et les lignes qui peuuent ces eſpaces, irrationaus, irrationeles.

Par les lignes qui peuuent ces eſpaces, ſe doiuent entendre les cotez des quarez irrationaus, ou, ſi les eſpaces rectangles ne ſont pas quarez, les moyenes proportioneles entre leurs cotez inégaus, puiſque leurs quarez ſont egaus à ces eſpaces, a 17 6. & que le quaré d'vne ligne eſt apelé ſa puiſsance.

Il apert par ces definitions, que les termes de Rationel & d'irrationel ſont relatifs, & qu'ils ſignifient le raport des grandeurs comparées les vnes aus autres, puiſqu'ils denotent leur naturele comenſurabilité ou incomenſurabilité. Et quoy que la grandeur proposée, telle qu'eſt la ligne de la 5e. definition, ſemble eſtre nomée Rationele abſolument, & ſans la conſideration de quelqu'autre que ce ſoit, come eſtant priſe d'abord d'vne grandeur conuë & determinée, ſur laquele les autres ſe doiuent former; ſi eſt-ce qu'à proprement parler, elle n'eſt nomée Rationele qu'eu egard aus autres qui en ſont deriuées, veu que de ſoy meſme elle n'eſt pas plus rationele que celles-là, & que toutes ſont d'elles meſmes auſsi bien rationeles que la proposée, lors qu'elles ne luy ſont pas compa-

rées : & meſme, come nous le ferons voir plus clairement ſur la 7e propoſition, la rationele proposée eſt auſsi bien irrationele à comparaiſon des autres, come les autres ſont irrationeles à ſon egard, pource qu'il n'y a point de ligne quelle qu'elle ſoit, qui ne puiſſe eſtre priſe pour Rationele, ſi on l'imagine diuiſée en tant de parties qu'on voudra, come 4. 5. 10. &c. car alors elle ſera explicable par ces nombres ; & toutes les lignes qui ne ſeront pas comenſurables à celle-là, ſeront reputées irrationeles, leſqueles neanmoins eſtans diuiſées en telle multitude de parties qu'on voudra, pouront eſtre priſes chacune pour Rationeles, à comparaiſon des autres qui ſeront fabriquées ſur leurs meſures, leſqueles ſeront en ſuite Rationeles ou Irrationeles.

Il faut donc ſe ſouuenir que tout ce qui ſera dit en chaque propoſition de ce liure, des lignes & ſuperficies Rationeles & irrationeles, ſe doit touiours referer à la ligne priſe d'abord pour Rationele, ou à ſon quaré, & c'eſt celle-là meſme que nous auons noméeen la 5e definition, Rationele propoſée : & que tout ce qui ſe dira en chaque demonſtration ſur ce ſuiet, ſe doit touiours entendre au regard de celle-là, & non d'autre : quoy qu'il ne ſoit pas neceſſaire de prendre dans tout le cours du liure, vne ſeule ligne pour la propoſée, pourueu qu'on ne ſe ſerue que d'vne meſme dans vne demonſtration ; laquele ſera imaginée eſtre compoſée de certain nombres de piés, palmes, toiſes, ou de telle autre meſure conüe qu'on voudra, par le moyen de laquele on formera toutes les autres, dont il ſera queſtion.

AXIOMES.

I. Si vne grandeur meſure deus autres grandeurs ; elle meſurera auſſi la compoſée des meſmes grandeurs.

II. Si vne grandeur meſure vne autre grandeur : elle me-

ſurera auſſi toutes les grandeurs qui en ſeront meſurées.

III. Si vne grandeur meſure toute vne grandeur & ſa partie: elle meſurera auſſi le reſte.

Ces trois axiomes ſont ſemblables à ceus que nous auons expliquez pour les nombres apres leurs definitions. C'eſt pourquoy nous ne nous y areterons pas dauantage.

PROPOSITION I. TEOREME I.

SI deus grandeurs ſont comenſurables, la moindre eſt partie, ou pluſieurs parties de la plus grande.

Que les deus grandeurs B, D, ſoient comenſurables, & B, la moindre. Ie dis que B, eſt partie ou pluſieurs parties de D. Car ſi B, meſure D, eſtant repetée pluſieurs fois, elle egalera D, (autrement elle ne ſeroit pas ſa meſure) & partant ſera partie de D. Si elle ne meſure pas D; leur comune meſure repetée pluſieurs fois egalera D; & repetée auſſi pluſieurs autresfois egalera B; donc B, contiendra pluſieurs parties egales à celles dont D, eſt compoſée, c'eſt à dire qu'elle eſt pluſieurs parties de D. Ce qu'il faloit demontrer.

B. D.

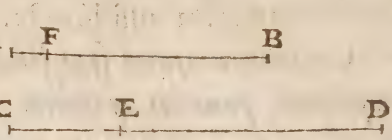
ANOTATION.

Cette propoſition eſt ſemblable à la 4e. prop. du 7e. d'Euclide, ſe doit entendre des parties aliquotes, come ſont $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{6}$, *&c. & eſt fort facile en nombres.*

PROP. II. TEOR. II.

SI deus grandeurs inegales ſont comenſurables, & que la moindre ſoit otée de la plus grande, & le reſte, de la moindre, & continuelement le dernier reſte, du reſte precedent: on trouuera vne grandeur qui meſurera la precedente, dont elle aura eſté tirée.

Que les grandeurs AB, CD, ſoient comenſurables, & que la moindre AB, eſtant otée de la plus grande CD, autant qu'il ſe poura, le reſte ſoit EC. qui oté d'AB, laiſſe AF, & ainſi continuelement. Ie dis que par cette detraction l'on trouuera vne grandeur, qui etant otée de la precedente, ne laiſſera rien de reſte, & par conſequent la meſurera.



Car puiſqu'AB, CD, ſont comenſurables, leur comune meſure quelle qu'elle ſoit, meſurant AB, *a* meſurera auſſi ED, qui eſt meſurée d'AB, & par conſequent *b* auſſi le reſte EC; & parce que EC, meſure FB: la meſme meſure comune d'AB, CD, *c* meſurera auſſi FB, & auſſi le *d* reſte AF. On prouuera de la meſme ſorte que la meſure comune des deus grandeurs propoſées meſurera quelque grandeur reſtante que ce ſoit: & partant toute grandeur reſtante eſtant comenſurable aus deus propoſées, *e* ſera ou leur partie ou pluſieurs de leurs parties aliquotes. Or toute grandeur reſtante ne ſera pas pluſieurs parties des deus propoſées; car puiſqu'on ôte toujours la moindre de la plus grande, leur multitude diminüera toujours: & parce qu'elles ne ſont pas infinies (autrement elles ne ſeroient pas aliquotes) on trouuera en fin vne grandeur qui ne ſera qu'vne de ces parties, & partant la precedente eſtant, come nous auons montré, compoſée de ces parties, en ſera meſurée. Ce qu'il, &c.

a 2. ax.
b 3. ax.
c 2. ax.
d 3. ax.
e 1. prop.

ANOTATION.

Les deus premieres propoſitions d'Euclide ſont fort diferentes de celles-cy, mais come elles ne ſeruent que pour demontrer la ſuiuante (ce que nous ferons bien plus facilement par le moyen de ces deus-cy) & que la 2e a eſté cauſe d'erreur à quelques-vns, nous n'auons point fait de dificulté de les obmetre, & de ſubſtituër celles-cy à leur place. Quant à la premiere, bien qu'elle ſoit tres-veritable, & qu'il n'y ait rien à redire, neanmoins par ce qu'elle ne ſert que de preuue pour

la segonde, laquelle nous auons iugé necessaire de retrancher, elle auroit esté entierement inutile. Pour la segonde, elle est telle.

Deus grandeurs inegales estans proposées, si on ôte la moindre de la plus grande, & le reste, du reste precedent, sans que iamais le dernier reste mesure la grandeur precedente: les grandeurs proposées sont incomensurables.

Or cette proposition est sans doute tres-certaine, & neanmoins il ne semble pas à propos de s'en seruir, pource que son hipotese est entierement impossible, puisque dans la pratique deus grandeurs, pour incomensurables qu'elles soient, sembleront toujours comensurables (s'il s'en faut raporter à la ueüe) par cette mutuele detraction qui y est proposée, ueu que par ce moyen on ariuera à une si petite grandeur, qu'elle sera sans doute iugée mesurer la grandeur precedente dont elle aura esté tirée. Outre que quand on pouroit continuer cette soustraction aussi long tems que l'on voudroit, on ne peut pas estre asseuré qu'elle ne finît iamais, si bien qu'il semble inutile de dire, si une telle chose est, puisqu'il ne se trouuera jamais qu'elle soit ainsi. Ie say bien que ce Teoreme ne sert que pour prouuer en la 3e. proposition, qu'il est impossible qu'il ne se troue en fin une grandeur qui mesure la precedente, contre celuy qui le voudroit nier, mais il faloit donc y inserer cette demonstration, qui auroit esté suportable, s'en seruant seulement contre l'aduersaire pour le conduire à l'impossible, sans en faire une proposition à part, dont la supositiõ est dificile à conceuoir. D'ailleurs cette mesme proposition pouroit aisément tromper le Lecteur, & luy faire croire que cette continuele detraction est un moyen pour conôitre si deus grandeurs sont comensurables ou incomensurables: come il est ariué à Clauius

de ſe l'imaginer au ſcolie de cette propoſition, ce qu'il explique encore plus au long en celuy de la 3e. En quoy il s'eſt trompé aſſez lourdement; car ſi les grandeurs proposées eſtoient incomenſurables, & qu'on voulut par cette épreuue, ſauoir ſi elles le ſeroient ou non, quand bien on pouroit continuer la ſouſtraction durant dis ans, on ſeroit auſsi auancé que le premier iour, ne pouuant pas apres tout cela eſtre aſſeuré de ne trouuer iamais de grandeur qui meſurât la precedente; & partant on ne ſeroit pas certain qu'elles fuſſent incomenſurables; & ne ſe rencontrant pas non plus de grandeur qui meſurât la precedente, on ne pouroit pas dire qu'elles fuſſent comenſurables. Mais l'experience nous aprend aſſez que cette operation ne peut pas durer tant de tems, & que l'on eſt bien tôt paruenu à des grandeurs ſi aparemment egales, qu'il n'eſt point d'yeus de Linx qui y puiſſent metre aucune diference; ce qui ſeroit cauſe que toutes grandeurs de meſme eſpece, ſeroient eſtimées comenſurables, come remarque Dibuadius. Et partant cette propoſition ne peut aucunement ſeruir pour conoitre leur comenſurabilité ou incomenſurabilité, quoy qu'en ait peu croire Clauius, de façon qu'on ne doit pas trouuer etrange, apres tout ce que nous venons de dire, que nous l'ayons retranchée.

Aplication des nombres.

Que les grandeurs proposées ſoient en nombres 11. & 3. ôtant 3. de 11. autant que faire ſe poura, le reſte ſera 2. lequel ôté de 3. reſtera l'vnité, laquele etant ôtée de 2. ne reſtera rien.

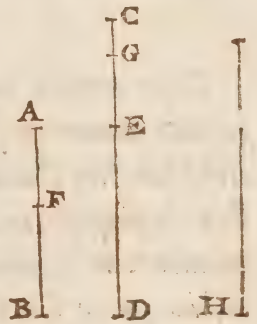
Mais ſi on propoſoit les nombres incomenſurables ℞ 6. & ℞ 2. ôtant ℞ 2. de ℞ 6. le reſte ſeroit ℞ 6 — ℞ 2. qui ôté de ℞ 2. reſte ℞ 8 — ℞ 6. qui ôté de ℞ 6 — ℞ 2. reſte

℞ 24 — ℞ 18. *dont ôtant* ℞ 8 — ℞ 6. *reſte* ℞ 54 — ℞ 50. *qui ôté de* ℞ 8 — ℞ 6. *le reſte ſera* ℞ 98 — ℞ 96. *& ainſi à l'infini, ſans que la ſouſtraction ceſsât iamais.*

PROP. III. PROBLEME. I. 3.

Pluſieurs grandeurs comenſurables eſtans propoſées: trouuer leur comune meſure.

Qu'il faille premierement trouuer la comune meſure des deus grandeurs comenſurables AB, CD. Or puiſqu'elles ſont comenſurables, ſi on ôte la moindre AB, de la plus grande CD, autant que faire ſe poura, & le reſte EC, d'AB, & ainſi continuelement, on *a* trouuera vne grandeur qui meſurera la precedente. Que la grandeur CG, eſtant ôtée de la grandeur AF, ne laiſſe rien de reſte, c'eſt à dire qu'elle meſure AF.



a 2. 7.

Ie dis que CG, meſure les deus grandeurs AB, CD. Car puiſque CG, meſure AF, & par *b* conſequent auſſi GE, qui eſt meſurée d'AF, & que CG, ſe meſure ſoy meſme vne fois, CG, *c* meſurera la toute EC; *d* donc auſſi FB, qui eſt meſurée d'EC; & partant auſſi la *e* toute AB: donc *f* auſſi ED, qui eſt meſurée d'AB. Et parce que CG, meſure auſſi EC, come il a eſté prouué, elle meſure la *g* toute FC: & ainſi elle eſt comune meſure d'AB, CD.

b 2. ax. c 1. ax. d 2. ax. e 1. ax. f 2. ax. g 1. ax.

Soit encores propoſée la grandeur H, comenſurable aus deus premieres, & qu'il faille trouuer la comune meſure de toutes trois. Or ſi CG, meſure auſſi H, il eſt certain qu'elle ſera comune meſure des trois propoſées. Si CG, ne meſure pas H, elle luy ſera pour le moins comenſurable. Car la meſure comune des trois grandeurs propoſées, meſurant AB, meſurera auſſi ED, qui en eſt meſurée, & auſſi le reſte EC, & par conſequent FB, qui eſt meſurée d'EC, donc auſſi le reſte AF, & partant auſſi GE, meſurée par AF. Et parce que la

h 2. ax.

meſme comune meſure des trois propoſées a eſté prouuée
a 3. ax. meſurer la toute EC, elle *a* meſurera le reſte CG. Donc puiſqu'H, & CG, ſont comenſurables, ſoit trouuée leur comune meſure de la meſme façon que CG, a eſté trouuée pour comune meſure d'AB, CD: & cette derniere trouuée ſera la meſure comune de toutes trois. Car meſurant CG, elle me-
b 2. ax. ſurera *b* auſſi AB, CD, qui en ſont meſurées, & meſurant auſſi la 3e H, par la conſtruction, elle les meſurera toutes trois. Et s'il y auoit quatre grandeurs, il faudroit trouuer la meſure comune de la 4e, & de la comune meſure des trois premieres, & ainſi des autres.

ANOTATION.

Cette comune meſure trouuée de la ſorte, eſt auſsi la plus grande comune meſure de ces grandeurs, ainſi que le demontrent tous les Comentateurs d'Euclide, & l'enoncent auſsi dans la propoſition: mais parce qu'en tout ce liure il ſufit de trouuer vne comune meſure quelle qu'elle ſoit, ſans qu'il ſoit beſoin que ce ſoit la plus grande, nous n'auons pas iugé neceſſaire de le demontrer.

Aplication des nombres.

Pour les rationaus ou vulgaires, il n'eſt pas beſoin de cet artifice, puiſque l'vnité les meſure tous, ſi ce n'eſt qu'on veuille trouuer leur plus grande comune meſure: ce qu'Euclide enſegne au comencement du 7e liure. Mais quant aus irrationaus, ce precepte n'y peut ſeruir, veu que pour ſouſtraire l'vn de l'autre, il faut ſauoir leur comune meſure; de ſorte que ce ſeroit faire vn cercle. Mais leur comune meſure ſe trouue par la diuiſion, come nous auons enſegné en leur Aritmetique.

LEMME I.

Si on propoſe deus égales multitudes de grandeurs, & de nombres,

nombres, & que les nombres soient pris deus à deus en mesmes proportions que les grandeurs prises aussi deus à deus: par égalité les nombres seront en mesme proportion que les grandeurs.

Que les trois grandeurs A, B, C, & les trois nombres D, E, F, soient pris deus à deus en mesme proportion, en sorte qu'A, soit à B, come D, à E: & B, à C, come E, à F. Ie dis que par egalité de proportions A, sera à C, come D, à F. Car ayant diuisé telle grandeur qu'on voudra de mesme espece que les trois proposées, en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez en D, laquelle grandeur soit G: & ayant pris les deus autres grandeurs H, I, chacune d'autant de parties egales à celles de G, qu'il y a d'vnitez en chacun des nombres E, F: les trois grandeurs G, H, I, seront entre elles en mesme proportion que les trois nombres D, E, F, puisque chacune d'elles contient autant de parties egales que chacun des nombres D, E, F, contient d'vnitez. Or les trois nombres sont par l'hipotese en mesme proportion que les grandeurs G, H, I: donc les trois grandeurs G, H, I, sont entre elles come les trois A, B, C: & partant par a *egalité come A, est à C, ainsi G, à I. Or come G, est à I, ainsi D, est à F, puisque D, contient autant de parties d'F, que G, contient de parties d'I, par la construction: donc come A, est à C, ainsi D, à F.*

a 22. 5.

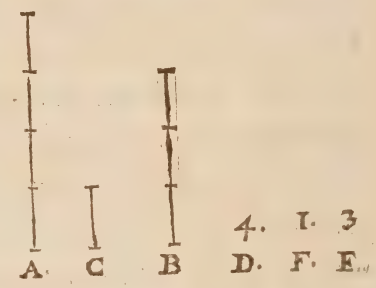
Anotation.

Cette demonstration sera peut estre plus claire & plus intelligible que celle de Clauius & des autres interpretes, qui

prouuent ce Lemme par la composition des propositions, qui est vne chose assez obscure & mal entendue.

PROP. IV. TEOR. III.

5. Les grandeurs comensurables sont entre elles en mesme proportion qu'vn nombre à vn autre nombre.



Que les grandeurs A, B, soient comensurables. Ie dis qu'elles ont proportion de nombre à nombre. Car si on prend leur *a* comune mesure C, & les deus nombres D, E, qui contienent autant de fois l'vnité qu'A, & B, contienent C, il y aura mesme proportion d'A, à C, que de D, à l'vnité, & mesme proportion de C, à B, que de l'vnité à E: donc *b* par egalité A, sera à B, come le nombre D, au nombre E. Ce qu'il faloit, &c.

a 3. 7.

b Lem. 1.

ANOTAT.

Si les grandeurs proposées sont des lignes, elles doiuent estre comensurables de longueur, car les comensurables de puissance seulement, n'ont aucune mesure comune, mais leurs quarez seulement, de sorte qu'on pouroit dire que les lignes comensurables de puissance seulement, ont leurs quarez come nombre à nombre.

Il faut aussi remarquer que les grandeurs comensurables sont entre elles come les nombres par lesquels leur mesure comune les mesure, c'est à dire ceus qui denotent combien de fois leur mesure comune est contenüe en chacun d'eus: ce qui est aisé à inferer de cette proposition, en laquele les grandeurs A, B, sont entre elles come les nombres D, E, qui expriment

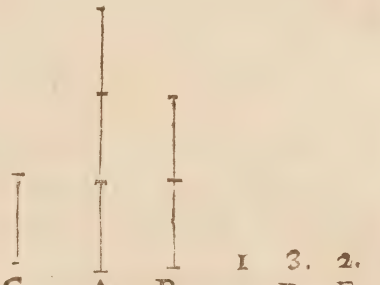
combien de fois chacune d'elles contient la grandeur C, qui eſt leur meſure comune.

Prop. V. Teor. IV.

6.

Si deus grandeurs ont entre elles proportion de nombre à nombre, elles ſont comenſurables.

Que les grandeurs A, B, ayent meſme proportion que les nombres D, E. Ie dis qu'elles ſont comenſurables. Ayant diuiſé A, en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez en D, dont l'vne ſoit C, il y aura meſme proportion de C, à A, que de l'vnité à D: & meſme proportion d'A, à B, que de D, à E: donc par *a* egalité, C, ſera à B, comme l'vnité à E: & partant puiſque l'vnité meſure E: C, meſurera B: & parce que C, meſure auſſi A, par la conſtruction, A, B, ſont comenſurables. Ce qu'il, &c.



a Lem. 1.

Corolaire.

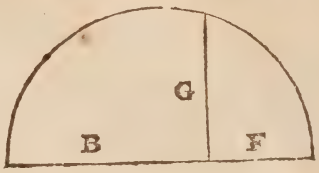
Par le moyen de ce qui a eſté dit en cette demonſtration, il eſt facile de trouuer vne ligne droite, à qui vne ligne donée ait meſme proportion qu'vn nombre doné à vn nombre doné, en diuiſant la ligne donée en autant de parties egales, qu'il y a d'vnitez en l'vn des nombres, & prenant vne autre ligne compoſée d'autant de parties egales à celle de la donée, qu'il y a d'vnitez en l'autre nombre.

On poura auſſi trouuer vne ligne droite, au quaré de la-

quele, le quaré d'vne ligne donée ait meſme proportion, qu'vn nombre doné à vn nombre doné. Car ſi la ligne B, eſtant donée, on veut trouuer vne autre ligne au quaré de laquele, le quaré de B, ſoit come le nombre C, au nombre D, ayant premierement trouué la ligne F, à qui la ligne B, ſoit come C, à D, ſoit *a* trouuée entre B, & F, la moyene proportionele G, & le quaré *b* de B, ſera au quaré de G, come B, à F, c'eſt à dire come C, à D.

a 13. 6.

b Cor. 20. 6.



C6. D2.

Anotat.

Si les grandeurs propoſées ſont lignes droites, elles ſeront comenſurables de longueur & de puiſſance, car les comenſurables de puiſſance ſeulement, ne ſeroient pas come nombre à nombre, contre l'hipoteſe.

7. & 8

Prop. VI. Teor. V.

Les grandeurs incomenſurables, n'ont pas proportion de nombre à nombre. Et les grandeurs qui n'ont pas proportion de nombre à nombre, ſont incomenſurables.

Premierement ſi les grandeurs incomenſurables A, B, eſtoient come vn nombre à vn autre nombre, elles ſeroient *c* comenſurables contre l'hipoteſe. A. B.

c pr. 5.

Au contraire ſi les grandeurs A, B, ſont ſupoſées n'eſtre pas come nombre à nombre, elles ſont incomenſurables: car ſi on vouloit dire qu'elles fuſſent comenſurables, elles *d* ſeroient come nombre à nombre, ce qui eſt encores contre l'hipoteſe.

d 4. 7.

Anotat.

Les lignes incomenſurables de quelque façon que ce ſoit,

n'ont pas proportion de nombres, car ny les incomensurables de longueur seulement, ny les incomensurables de longueur & de puissance, n'ont aucune mesure comune.

Mais si des lignes sont supoſées n'estre pas come nombre à nombre, elles ne sont pas necessairement incomensurables de puissance, parce que pour n'estre pas come nombre à nombre, il sufit qu'elles n'ayent aucune comune mesure, come il ariue aus incomensurables de longueur, de sorte qu'on ne peut inferer de ce Teoreme, sinon que les lignes qui n'ont pas proportion de nombre à nombre sont incomensurables de longueur.

LEMME II.

Si trois quantitez sont continuelement proportioneles, & trois autres aussi continuelement proportioneles, & que la premiere & la troisieme du premier ordre, soient entre elles, come la premiere & la troisieme du deuziesme ordre: la premiere & la segonde du premier ordre, seront aussi entre elles come la premiere & la segonde du segond ordre.

Que les trois grandeurs A, B, C, soient continuelement proportioneles, & les trois nombres D, E, F, aussi continuelement proportionaus, & que la grandeur A,

A, B, C,
D, E, F,

soit à la grandeur C, come le nombre D, au nombre F. Ie dis qu'A, est à B, come D, à E.

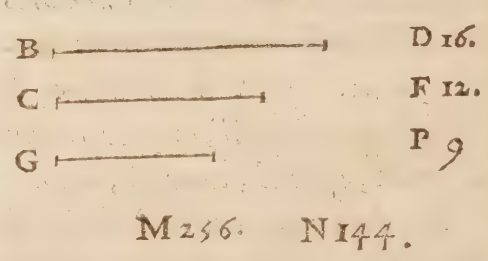
Car la proportion d'A, à C, est la proportion a doublée de celle d'A, à B: & la proportion de D, à F, est la proportion doublée de celle de D, à E. Donc puisque les proportions A, C; D, F; sont egales, les proportions A, B, & D, E, dont les proportions A, C; D, F, sont proportions doublées, seront aussi egales. a 21. def. num.

9. PROP. VII. TEOR. VI.

Les quarez des lignes droites comenſurables de longueur, ſont entre eus come vn nombre quaré à vn nombre quaré. Et les quarez qui ont proportion de nombre quaré à nombre quaré, ont leurs côtez comenſurables de longueur. Mais les quarez des lignes incomenſurables de longueur, n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré. Et ſi des quarez n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, leurs côtez ne ſeront pas comenſurables de longueur.

1. Que les lignes B, C, ſoient comenſurables de longueur. Ie dis que leurs quarez ont proportion de nombre quaré à nombre quaré. Puiſque B, C, ſont comenſurables, elles *a* ſont entre elles come nombre à nombre : que ce ſoit come D, à F, dont les quarez ſoient M, N. Aus deus lignes B, C, ſoit *b* trouuée la 3e proportionele G : & aus deus nombres D, F, le 3e proportionel * P. Les quarez de B, C, ſeront *c* donc entre eus come B, à G : & les *d* nombres quarez M, N, come D, à P. Or la proportion de B, à G, *e* eſt la meſme, que de D, à P : donc le quaré de B, eſt au quaré de C, come D, à P, c'eſt à dire come le quaré M, au quaré N.

a 4. p. Ar.
b 11. 6.
* 18. p. Ar.
c Cor. 20. 6.
d 13. p. Ar.
e Lem. 1.

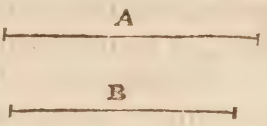


2. Que le quaré de B, ſoit maintenant au quaré de C, come le nombre quaré M, au nombre quaré N. Ie dis que B, C, ſont comenſurables de longueur. Ayant fait la meſme conſtruction, les quarez de B, C, ſeront *f* entre eus, come B, à G : & les nombres *g* quarez M, N, come D, à P. Donc

f Cor. 20. 6.
g 13. p. Ar.

puiſque les trois grandeurs B, C, G, ſont continuelement proportioneles, & les trois nombres D, F, P, continuelement proportionaus, & que B, eſt à G, come D, à P: la ligne *a* B, ſera à la ligne C, come le nombre D, au nombre F. *a Lem. 2.*

3. De plus, ſi les lignes A, B, ſont incomenſurables de longueur, leurs quarez n'auront pas proportion de nombre quaré à nombre quaré; car ſi cela eſtoit, elles ſeroient *b* comenſurables de longueur, contre l'hipoteſe. *b 2. art.*



4. En fin ſi les quarez d'A, B, n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, les lignes A, B, ſont incomenſurables de longueur. Car ſi elles eſtoient comenſurables de longueur, leurs quarez *c* auroient proportion de nombre quaré à nombre quaré, contre l'hipoteſe. *c 1. art.*

Corol. I.

Les lignes comenſurables de longueur, le ſont auſſi de puiſſance. Mais les comenſurables de puiſſance ne le ſont pas touiours de longueur.

Car premierement les quarez des lignes comenſurables de longueur, ſont entre eus come *d* nombre à nombre; & par. tant eſtans *e* comenſurables, leurs cotez ſont comenſurables de puiſſance par la definition. *d 1. art.* *e 5. p.*

De plus, les lignes dont les quarez n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, mais ſimplement de nombre, à nombre; ſont bien comenſurables de puiſſance, puiſque leurs quarez ſont comenſurables; mais ſont incomenſurables de longueur par la 4e partie de ce Teoreme.

Corol. II.

Les lignes incomenſurables de longueur ne ſont pas touiours incomenſurables de puiſſance. Mais les incomenſurables de puiſſance, ſont auſſi neceſſaire-

ment incomenſurables de longueur.

Car premierement les lignes dont les quarez ne ſont pas come nombre quaré à nombre quaré, mais neanmoins come vn nombre à vn nombre, ſont *a* incomenſurables de longueur, mais comenſurables de puiſſance, puiſque leurs quarez ſont comenſurables. 14. Art.

Secondement, ſi les lignes incomenſurables de puiſſance eſtoient comenſurables de longueur, il faudroit qu'elles fuſſent auſſi comenſurables de puiſſance, par le 1. Corol. ce qui eſt contre l'hipoteſe.

Corol. III.

Les lignes comenſurables de puiſſance ne ſont comenſurables de longueur, qu'alors que leurs quarez ont proportion de nombre quaré à nombre quaré. Et les incomenſurables de longueur, ne ſont incomenſurables de puiſſance, qu'alors que leurs quarez ne ſont pas entre eus come nombre à nombre.

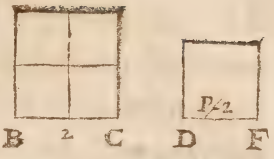
Ce qui eſt facile à inferer tant des dernieres demonſtrations que des autres Corolaires.

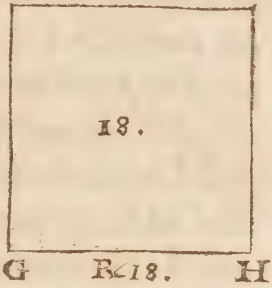
Anot.

Il faut bien remarquer que cette demonſtration conuient à toutes ſortes de lignes droites comenſurables de longueur, ſoit Rationeles, ſoit irrationeles, car bien que celles-cy ſoient incomenſurables à la Rationele propoſée, & qu'elles ne puiſſent, lors qu'elles luy ſont comparées, eſtre exprimées par aucuns nombres, neanmoins parce qu'eſtans comparées l'vne à l'autre, elles ont proportion de nombre à nombre, leurs quarez auront meſme proportion que les quarez des nombres qui les repreſentent, & la demonſtration leur conuiendra, de meſme

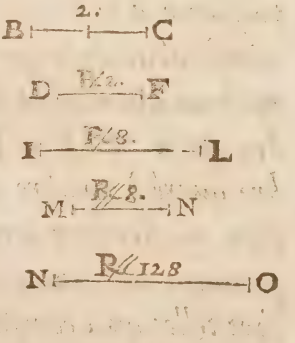
meſme qu'aus lignes Rationeles.

Que la ligne BC, ſoit par exemple la Rationele propoſée, exprimée par le nombre 2. & ſoit fait a *come 4. à 2. ainſi le quaré de BC, au quaré de DF. Donc puiſque les quarez de BC, DF, ſont en proportion double, qui eſt proportion de nombres immediats, ſauoir de 2. à 1, ils n'ont* b *pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, & partant BC, DF, ſont incomenſurables* c *de longueur. Soit encores fait come 4. à 18. ainſi le quaré de BC, au quaré de GH : & par la meſme raiſon les lignes BC, GH, ſeront incomenſurables de longueur, les nombres 4. & 18. n'ayans pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, puiſque l'vn eſt quaré & non pas l'autre : mais les lignes DF, GH, dont les quarez ſont par cette conſtruction en proportion de 2. à 18. qui eſt de nombre quaré à nombre quaré, ſauoir de 1. à 9. ſont comẽſurables* d *de longueur eſtans come 1. à 3. Et ſi on prend IL, double de DF, les lignes IL, DF, eſtant comenſurables de longueur, puiſqu'elles ſont come 2. à 1. leurs* e *quarés ſeront come nombre quaré à nombre quaré, ſauoir come 4. à 1. quoy que DF, IL, ſoient toutes deus incomenſurables de longueur à la rationele propoſée BC, & qu'à ſon egard elles ne puiſſent eſtre exprimées par*

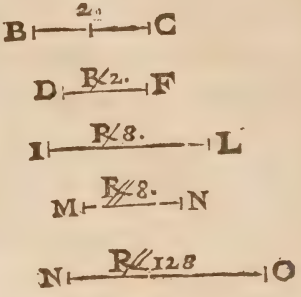




c 4. art.



nombres, le quaré de B C, estant à celuy de D F, come 4. à 2: & à celuy d'I L, (dont le quaré est quadruple de celuy de DF) come 4. à 8. lesquelles proportions ne se peuuent exprimer a en nombres quarez, puisque l'vne est double & l'autre sousdouble. Et si on prend maintenant entre BC, DF, la moyene proportionele MN, & la ligne NO, double d'MN: le quaré b de BC, sera au quaré d'MN, come BC, à DF, dont la proportion ne se peut exprimer par nombres, c'est à dire que BC, MN, sont incomensurables de puissance, & partant aussi de longueur. Et parce que le quaré d'NO, est c quadruple du quaré d'MN, c'est à dire contient 4. de telles parties dont celuy d'MN, en est vne, le quaré de BC, qui a esté prouué incomensurable au quaré d'MN, sera aussi incomensurable au quaré d'NO, qui est quadruple de celuy d'MN: & ainsi BC, NO, sont aussi incomensurables de puissance, & par consequent de longueur. Les deus lignes MN, NO, estant donc incomensurables de puissance à la proposée BC, sont irrationeles; mais estans comensurables de longueur entre elles, leurs d quarez ont, come nous auons déia dit, proportion de nombre quaré à nombre quaré. Et si on supose qu'elles ayent proportion de nombre quaré à nombre quaré, il s'ensuiura par cette proposition qu'elles sont comensurables e de longueur. Le mesme se prouuera de toutes autres irrationeles, pource qu'elles ne sont telles qu'à comparaison de la proposée, & non pas entre elles. Et mesme la Rationele proposée deuiendroit irrationele si on vouloit prendre pour Rationele proposée, quelqu'v-



a An. 16. p. Ar. art. 2. & 5.

b Cor. 20. 6.

c Scol. 20. 6.

d 1. art.

e 2. art.

ne de celles qui seroient irrationeles à son egard. Car s'imaginant, par exemple, la ligne irrationele MN, diuisée en quatre parties egales: la ligne BC, ne se pouroit exprimer par aucun nombre à son egard, & luy seroit incomensurable de puissance, MN, BC, ayans leurs quarez come 16. à ℞ 512. car en faisant come ℞ 8. premier nombre d'MN, à 2. premier nombre de BC, ainsi 4. segond nombre de MN, à vn autre, le 4e terme seroit ℞ 512. pour le segond nombre de BC, laquelle par consequent est aussi bien irrationele à comparaison de MN, qu'MN, l'est à comparaison de BC. Et partant ne considerant point la ligne proposée, toutes lignes peuuent estre Rationeles, & on peut leur apliquer la demonstration de ce Teoreme.

Il faut encores prendre garde, qu'il n'est pas necessaire que les quarez qui ont proportion de nombre quaré à nombre quaré, soient composez d'autant de petites mesures egales à celles dont le quaré de la Rationele proposée est composé, qu'il y a d'vnitez aus nombres quarez qui les representent, pource que cette proportion de nombre quaré à nombre quaré pouuant estre a exprimée par des nombres non quarez, ce sera assez qu'ils contienent autant de ces mesures quarées qu'il y a d'vnitez en quelques nombres que ce soit non quarez, pourueu qu'ils ayent proportion de nombre quaré à nombre quaré, come il se voit aus quarez des lignes DF, & GH, dont l'vn contient 2. & l'autre 18. de telles parties, dont le quaré de BC, en contient quatre, quoy que les nombres quarez qui les expriment, soient 1. & 9. ou 4. & 36. Et outre qu'il n'est pas besoin que ces mesures quarées soient en pareil nombre qu'il y a d'vnitez en ces nombres quarez, il n'est pas mesmes neccessaire que ces mesures soient comensurables à celles dont le quaré de la Rationele proposée

a 15. p. Arit.

eſt composé, come nous l'avons montré aus quarez des lignes MN, NO, dont les quarez ſont incomenſurables au quaré de la propoſée BC, & partant toutes les parties aliquotes de ces quarez-là, aus parties aliquotes de cettuy-cy, (car ſi les parties aliquotes d'vne grandeur eſtoient comenſurables aus parties aliquotes d'vne autre grandeur, les totales ſeroient comenſurables, puiſque ces parties eſtans repetées pluſieurs fois pouroient egaler l'vne & l'autre:) Et neanmoins les quarez d'MN, NO, ne laiſſent pas d'eſtre en proportion de nombre quaré à nombre quaré.

117. COROL. IV.

Le diametre d'vn quaré eſt incomenſurable de longueur à ſon coté.

47. 1. Car le quaré du diametre eſtant double du premier quaré, ces deus quarez ſeront entr'eus come 2. à 1. leſquels nombres *a* n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré puiſqu'il n'y a point entr'eus de moyen proportionel. Et partant leurs côtez, c'eſt à dire le diametre & le côté du quaré, ſont incomenſurables de longueur, par le 4e art. de cette prop.

a 8 Teor. 14. P. Ar.

Cette demonſtration eſt bien plus facile & plus claire que celle qui ſe voit ordinairement à la fin de ce liure, quoy qu'en puiſſe dire Clauius. Auſsi n'auons-nous pas fait de difficulté de la retrancher, puiſque celle-cy eſt bone & ſufiſante, & que l'autre eſt longue & obſcure, & d'ailleurs hors de propos en cet endroit là.

Pour les nombres ils ſe voyent aſſez apliquez en l'Anotation, ſans qu'il ſoit beſoin d'en apliquer d'autres.

10. PROP. VIII. TEOR. VII.

Si quatre grandeurs ſont proportioneles, & que la

premiere ſoit comenſurable à la ſegonde: la troiſiéme ſera comenſurable à la quatriéme. Et ſi la premiere eſt incomenſurable à la ſegonde; la troiſieme ſera incomenſurable à la quatriéme.

Que les grandeurs B, C, D, F, ſoient proportioneles, & que B, ſoit comenſurable à C: je dis que D, eſt comenſurable à F. Car puiſque B, C, ſont comenſurables, elles ſeront come *a* nombre à nombre: que ce ſoit come G, à L. Or D, F, ſont come B, à C; donc D, F, ſont auſſi come le nombre G, au nombre L; & partant ſont comenſurables, par la 5. propoſition.

B. C. D. F.
G 3. L 2.

a 4 P.

Que ſi B, C, ne ſont pas comenſurables, elles ne ſeront pas come nombre à nombre, ny par conſequent D, F, qui ſont en meſme proportion.

Corol. I.

Si quatre lignes droites ſont proportioneles, & que les deus premieres ſoient comenſurables de longueur: les deus autres ſeront auſſi comenſurables de longueur.

Car les deus premieres eſtans b *come nombre à nombre, les deus dernieres le ſeront auſſi, & partant ſeront* c *comenſurables de longueur. Le meſme ſe doit entendre des incomenſurables de longueur.*

b *An.* 4. P.
c *An.* 5. P.

Corol. II.

Si quatre lignes ſont proportioneles, & que les deus premieres ſoient comenſurables de puiſſance ſeulement: les deus autres ſeront auſſi comenſurables de puiſſance ſeulement.

Car puiſque les lignes ſont proportioneles, leurs d *quarez*

d 22.6.

ſeront proportionaus, & partant le premier eſtant comenſurable au ſegond, le troiſieme ſera comenſurable au quatrieme par cette propoſition. Et parce que les deus premieres eſtans incomenſurables de longueur ne a *ſont pas come nombre à nombre, les dernieres ne ſeront pas non plus come nombre à nombre, & partant ne ſeront pas* b *comenſurables de longueur.*

a 6. p.

b An. 5 p.

Corol. III.

Si quatre lignes droites ſont proportioneles, & que les deus premieres ſoient incomenſurables de puiſſance: les deus autres le ſeront auſſi.

Car leurs quarez ſeront encor c *proportionaus, & partant les deus premiers eſtans incomenſurables, les deus derniers ſeront auſſi incomenſurables.*

c 22. 6.

Anotation.

Si les deus premieres grandeurs ſont des lignes, & que les deus autres ſoient des ſuperficies ou des ſolides; les lignes eſtans comenſurables ou incomenſurables de longueur, les autres grandeurs ſeront touiours comenſurables ou incomenſurables. Car ſi les lignes ſont comenſurables de longueur, elles d *auront proportion de nombre à nombre, & partant auſſi les autres grandeurs. Mais ſi les lignes ſont incomenſurables de longueur, bien que comenſurables de puiſſance, elles ne* e *ſeront pas come nombre à nombre, ny par conſequent les autres grandeurs.*

d An. 4. p.

e An. 6. p.

Que ſi les premieres grandeurs ſont des ſuperficies ou des ſolides, & les autres des lignes: on demontrera touiours que les lignes ſeront comenſurables ou incomenſurables de longueur, ſelon que les autres grandeurs ſeront comenſurables ou incomenſurables; car ſi les ſolides ou ſuperficies ſont comenſura-

bles, ils seront come nombre à nombre, & partant aussi les lignes, lesqueles par consequent seront comensurables de longueur; mais si les solides ou superficies ne sont pas comensurables, ils ne seront pas come nombre à nombre, ny partant aussi les lignes, qui pour cette raison seront a *incomensurables de longueur, mais non pas pour cela de puissance, puisque cela ne conclut rien pour leurs quarez.* a 5.

Aplication des nombres.

Que les quatre termes proportionaus soient ℞ 8. ℞ 2. ℞ 28. ℞ 7: *parce que* ℞ 8. *&* ℞ 2. *sont comensurables, aussi sont* ℞ 28. *&* ℞ 7.

Au contraire en ces quatre autres ℞ 6. ℞ 3. ℞ 10. ℞ 5. *les derniers sont incomensurables, en suite de ce que les premiers le sont.*

Lem. III. Probl. II.

Trouuer deus nombres plans, qui n'ayent pas proportion de nombre quaré à nombre quaré.

Soient pris deus nombres A, B, qui se suiuent immediatement. Ie dis qu'ils n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré: car si cela estoit, il y b *auroit entre eus vn moyen proportionel, & par consequent ils ne seroient pas immediats, contre l'hipotese.*

A 3. B 4.

b Cor. 14. p. Ar

Les nombres dont l'vn est quaré, & non pas l'autre; ne peuuent auoir cette proportion, puisque leur proportion est de nombre quaré à vn nombre non quaré.

Et generalement tous nombres plans qui ne seront pas semblables, dont nous auons ensegné l'inuention en l Anotation sur la 16. prop. Arit. ne peuuent auoir proportion de nombre quaré à

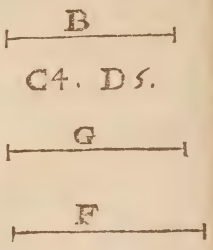
nombre quaré, par le dernier article de la meſme Anotation.

11. PROP. IX. PROBL. III.

Vne ligne droite eſtant donée, en trouuer deus autres qui luy ſoient incomenſurables, l'vne de longueur ſeulement, & l'autre auſſi de puiſſance.

Que la ligne donée ſoit B, à qui il faille premierement trouuer vne ligne incomenſurable de longueur ſeulement.

a Lem. 3. *b* Cor. 5. p. Ayant pris deus *a* nombres C, D, qui n'ayent pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, ſoit trouuée *b* la ligne F, au quaré de laquele le quaré de B, ſoit come C, à D. Ie dis que la ligne F, eſt incomenſurable de longueur ſeulement à la ligne propoſée B. Car par la conſtruction le quaré de B, n'a pas proportion au quaré d'F, de nombre quaré à nombre quaré, puiſque ces quarez ſont come C, à D, & partant B, F, ſont *c* incomenſurables de longueur, mais parce que les meſmes quarez ont proportion de nombre à nombre, ils ſont *d* comenſurables, qui eſt à dire que les lignes B, F, ſont *e* comenſurables de puiſſance.



c 7. p. *d* 5. p. *e* 3. deffin.

Qu'il faille maintenant trouuer vne ligne incomenſurable de puiſſance à la ligne B. Entre les lignes B, F, ſoit priſe la moyene *f* proportionele G: elle luy ſera incomenſurable de puiſſance. Car le quaré de B, eſt au quaré de G, come B, à F. Or B, & F, eſtans incomenſurables de longueur *g* ne ſeront pas come nombre à nombre, donc les quarez de B, G, ne ſeront pas come nombre à nombre, & partant ſeront *h* incomenſurables, c'eſt à dire que B, G, ſont incomenſurables de puiſſance.

f 13. 6. *g* An. 6. p. *h* 6. p.

Aplication des nombres.

Que la ligne B, *ſoit* 4. *& les nombres* C, D. 4. *&* 5. F, *ſera*

F, ſera par cette conſtruction B 20. *&* *G,* B 320.

PROP. X. TEOR. VIII. 12.

Les grandeurs comenſurables à vne autre grandeur, ſont comenſurables entre elles.

Que les grandeurs B, D, ſoient comenſurables à la 3e C. Ie dis qu'elles ſont comenſurables entre elles. Car B, C, eſtans comenſurables, *a* ſeront entre elles come nombre à nombre: que ce ſoit come L, à M, & par meſme raiſon, que C, ſoit à D, come F, à G. Aus trois nombres F, G, M, ſoit *b* trouué le 4e proportionel N: C, aura donc meſme proportion à D, que M, à N, puiſque M, eſt à N, come F, à G. Et partant B, eſtant à C, come L, à M, & C, à D, come M, à N: B, ſera *c* par egalité en meſme proportion auec D, qu'L, auec N: & partant B, D, eſtans come nombre à nombre, ſeront *d* comenſurables.

B.	C.	D.
L.	M.	N.
10.	8.	12.
	F.	G.
	2.	3.

a 4. p.

b 12. p. Ar.

c Lem. 1.

d 5. p.

ANOTATION.

Si les grandeurs B, C, D, ſont lignes, B, D, eſtans comenſurables à C, de longueur, le ſeront auſsi entre elles, parce que B, D, ſeront come nombre à nombre, de meſme qu'il a eſté demontré generalement.

Que ſi B, D, ne ſont comenſurables que de puiſſance à C, on demontrera qu'elles ſont comenſurables de puiſſance entre elles; mais il ne s'enſuiura pas neanmoins qu'elles ne ſoient pas comenſurables de longueur, car premierement on demontrera que les quarez de B, D, eſtans comenſurables à celuy de C, ſeront comenſurables entre eus: mais d'autre côté deus lignes comenſurables de longueur, peuuent bien eſtre toutes deus comenſurables de puiſſance ſeulement à vne 3e ligne:

come nous ferons voir sur la 17e. prop. art. 6.

La conuerse de cette proposition se demontrera aussi en cette sorte.

Si deus grandeurs sont comensurables, & que l'vne soit comensurable à vne 3e. l'autre luy sera aussi comensurable. A. B. C.

Que les grandeurs A, B, soient comensurables, & que B, soit comensurable à la 3e. grandeur C. Ie dis que la grandeur A, est aussi comensurable à C. Car puisqu'A, & C, 10. 1. sont comensurables à B, elles a seront comensurables entre elles par la derniere prop.

Que si les grandeurs A, B, C, sont lignes, & qu'A, B, soient comensurables de longueur, & A, comensurable de longueur à C: B, sera aussi comensurable de longueur à C, de la mesme sorte qu'il a esté prouué generalement. Mais si A, B, sont comensurables de puissance seulement, & qu'A soit comensurable, ou de longueur ou de puissance seulement à C; l'on poura bien inferer par le mesme argument que B, est aussi comensurable de puissance à C, parce que B, C, sont par l'hipotese comensurables de puissance à la ligne A: mais non pas, que si A, est comensurable de longueur à C; B, luy soit aussi comensurable de longueur, parce que toutes les deus lignes B, C, ne sont pas comensurables de longueur à la ligne A, mais seulement la ligne C, & non pas B, qui par l'hipotese ne luy est comensurable que de puissance,

Aplication des nombres.

Que les grandeurs B, D, soient ℞ 50. & ℞ 72. toutes deus comensurables à ℞ 32. qui est la grandeur M, elles seront comesurables, & leur comune mesure est ℞ 2.

Prop. XI. Teor. IX. 13.

Si de deus grandeurs propoſées l'vne eſt comenſurable, & l'autre incomenſurable à vne 3e. grandeur: elles ſont incomenſurables.

Car ſi A, eſtant comenſurable, & B, incomenſurable à la 3e. grandeur C, on veut dire qu'A, B, ſont neanmoins comenſurables entre elles: B, & C, ſeront toutes deus comenſurables à la grandeur A, & *a* partant entre elles, contre l'hipoteſe. Donc A, B, ne ſeront pas comenſurables. a 10. p.

A B C.

Anotation.

Si A, B, C, ſont lignes, & qu'A, ſoit comenſurable de longueur à C, mais B, incomenſurable de longueur à la meſme ligne C: A, B, ſeront incomenſurables de longueur par la meſme demonſtration.

Que ſi A, eſt comenſurable de longueur, ou de puiſſance ſeulement à C, & que B, luy ſoit incomenſurable de puiſſance, A, & B, ſeront incomenſurables de puiſſance; car ſi elles eſtoient comenſurables de puiſſance B, C, le ſeroient auſsi (puiſque cela ſupoſé A, leur ſeroit comenſurable de puiſſance à toutes deus) ce qui eſt contre l'hipoteſe, car B, eſt ſupoſée incomenſurable de puiſſance à C.

Aplication des nombres.

Qu'A, ſoit ℞ 8 : *B,* ℞ 28 : *C,* ℞ 18 : ℞ 8. *ſera comenſurable, &* ℞ 28. *incomenſurable à* ℞ 18. *& partant* ℞ 8. *&* ℞ 28. *incomenſurables.*

Prop. XII. Teor. X. 14.

Si de deus grandeurs propoſées comenſurables

entre elles, l'vne eſt incomenſurable à vne 3e grandeur: l'autre luy ſera auſſi incomenſurable.

Que les grandeurs B, C, ſoient comenſurables, & B, incomenſurable à vne 3e D. Ie dis que C, eſt auſſi incomenſurable à D. Car ſi C, D, eſtoient comenſurables, D, & B, ſeroient toutes deus comenſurables à C, & a partant entre elles: ce qui eſt contre l'hipoteſe.

B. C. D.

10. 1.

Anotat.

Si les grandeurs propoſées ſont lignes, & que B, C, ſoient comenſurables de longueur, & B, incomenſurable de longueur ſeulement, ou meſme encor de puiſſance à D: C, ſera auſsi incomenſurable de longueur à D. Car ſi C, D, eſtoient comenſurables de longueur, B, D, le ſeroient auſsi (puiſque cela ſupoſé, B, D, ſeroient toutes deus comenſurables de longueur à C,) contre l'hipoteſe.

10. 1.

Que ſi B, C, ſont ſeulement comenſurables de puiſſance, & B, incomenſurable de puiſſance à D, l'on inferera auſsi que C, ſera incomenſurable de puiſſance à D. Car ſi C, D, eſtoient comenſurables de puiſſance, B, & D, ſeroient toutes deus comenſurables de puiſſance à C, & partant auſsi entre elles contre l'hipoteſe,

De ce dernier Teoreme s'infere le ſuiuant.

Les grandeurs comenſurables à des grandeurs incomenſurables, ſont incomenſurables entre elles.

Que les grandeurs B, C, ſoient comenſurables aus grandeurs D, F, incomenſurables entre elles ſauoir B, à D, & C, à F. Ie dis que B, C, ſont inco-

B. C. D. F.

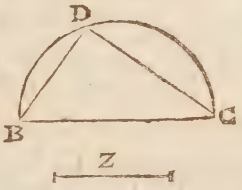
menſurables. Car puiſque B, D, ſont comenſurables, & que D, eſt incomenſurable à F: B, luy ſera a *auſsi incomenſurable. Or C, eſt comenſurable à F, par l'hipoteſe: donc B, qui a eſté prouuée incomenſurable à F, ſera auſsi incomenſurable à C,* a 12. 9.

L'aplication des nombres eſt facile en ces deus Teoremes.

Lem. IV. Probl. IV.

Deus lignes droites inegales eſtans propoſées: trouuer la diference de leurs quarez.

Que les lignes propoſées ſoient Z, & B C: Ayant ſur la plus grande B C, deſcrit le demy cercle B D C, ſoit inſcrite en la periferie B D C, la ligne B D, egale à Z, & ſoit tirée la ligne D C. Le quaré de B C, eſt b *egal aus quarez de B D, D C, puiſque l'angle D, eſt* c *droit, & partant le quaré de D C, eſt la diference des quarez de B D, (c'eſt à dire de Z,) & de B C.*



b 47. 1.
c 31. 3.

Prop. XIII. Teor. XI. 15.

Si quatre lignes ſont proportioneles, & que le quaré de la premiere excede le quaré de la ſegonde, du quaré d'vne ligne qui ſoit comenſurable de longueur à la premiere: le quaré de la troiſiéme excedera le quaré de la quatriéme, du quaré d'vne ligne qui ſera comenſurable de longueur à la troiſiéme. Et ſi le quaré de la premiere excede le quaré de la ſegonde, du quaré d'vne ligne qui ſoit incomenſurable de longueur à la premiere: le quaré de la troiſiéme excedera le quaré de la quatriéme, du quaré

d'vne ligne incomenſurable de longuenr à la troiſiéme.

Que les lignes B, C, D, F, ſoient proportioneles, & que le quaré de B, excede le quaré de C, du quaré de G: & le quaré de D, celuy d'F, du quaré d'L. Ie dis que ſi G, eſt comenſurable de longueur à B: L, ſera comenſurable de longueur à D: & que ſi B, G, ſont incomenſurables de longueur, D, L, ſeront auſſi incomenſurables de longueur. Car puiſque B, C, D, F, ſont proportioneles, leurs quarez ſeront *a* proportionaus: Or les quarez de C, G, enſemble ſont egaus au quaré de B: & les quarez d'F, L, enſemble, au quaré de D: donc le *b* compoſé des quarez de C, G, eſt au quaré de C, come le compoſé des quarez d'F, L, au quaré d'F. Et en *c* diuiſant, come le quaré de G, au quaré de C, ainſi le quaré de L, au quaré d'F: & partant les lignes G, C, L, F, ſeront proportioneles, & par *d* inuerſion, les lignes C, G, F, L, ſeront auſſi proportioneles. Donc puiſque B, eſt à C, come D, à F: & C, à G, come F, à L, par *e* egalité de proportions B, ſera à G, come D, à L. Et par conſequent *f* ſi B, G, ſont comenſurables de longueur, auſſi ſeront D, L: & ſi B, G, ſont incomenſurables de longueur, D, L, ſeront auſſi incomenſurables de longueur.

B D
C F
G L

a 22. 6.
b 7. 5.
c 17 5.
d Cor. 4. 5.
e 22. 5.
f 8. 5.

Anotat.

On demontrera de la meſme ſorte que ſi G, eſt comenſurable de puiſſance ſeulement à B; L, ſera auſſi comenſurable de puiſſance ſeulement à D, come il apert par l'Anot. de la 8. prop.

Aplication des nombres.

Qu'il y ait meſme proportion de ℞ 20. *à* ℞ 15. *que de* ℞ 24. *à* ℞ 18. *Or le quaré* 20. *excede le quaré* 15. *du quaré* 5. *dont le côté* ℞ 5. *eſt comenſurable de longueur à* ℞ 20: *de*

meſme auſſi le quarè 24. excede le quarè 18. du quaré 6. dont le côté ℞6. eſt comenſurable de longueur à ℞24.

Que ſi on propoſe les quatre lignes proportioneles ℞48. ℞3. ℞32. ℞2. parce que 48. excede 3. de 45. dont le côté ℞45. eſt incomenſurable de longueur à ℞48 : auſſi 32. excede 2. de 30. dont le côté ℞30. eſt incomenſurable de longueur à ℞32.

PROP. XIV. TEOR. XII. 16.

Vne grandeur compoſée de deus grandeurs comenſurables, eſt comenſurable à chacune d'elles. Et ſi la compoſée eſt comenſurable à l'vne des deus grandeurs qui la compoſent, ces grandeurs ſont comenſurables.

Que la grandeur A C, ſoit compoſée des deus grandeurs AB, BC, comenſurables entre elles. Ie dis que la toute AC, eſt comenſurable à chacune d'elles. Soit *a* priſe la comune meſure des parties A B, B C, laquelle ſoit D. Donc puiſque D, meſure AB, BC, elle meſurera *b* la toute A C, & partant AC, ayant meſme meſure que chacune de ſes parties, leur ſera comenſurable.

a 3. 7.

b 1. ax.

Que ſi on ſupoſe la toute A C, comenſurable à ſa partie B C, la comune meſure d'A C, BC, *c* meſurera auſſi A B, & partant A B, B C, ont vne meſme meſure comune. Ce qu'il faloit &c.

c 3. ax.

COROL. I.

Si vne grandeur eſt comenſurable à l'vne de ſes parties, elle eſt auſſi comenſurable à l'autre; car en la ſegonde partie de ce Teoreme, la comune meſure d'AC, BC, a eſté prouuée meſurer auſſi AB.

ANOTATION.

La diference de deus grandeurs comenſurables, eſt comenſurable à chacune d'elles: car en la derniere figure AC, BC, eſtant comenſurables, leur comune meſure meſurant la toute AC, & la partie BC, meſurera auſſi le reſte AB, diference d'AC, BC.

Aplication des nombres.

La ſomme des comenſurables 15. *&* 45. *eſt* 80. *qui eſt comenſurable à ſes parties: car* 80. *eſt à* 5. *come* 4. *à* 1. *& à* 45. *come* 4. *à* 3.

17. PROP. XV. TEOR. XIII.

Si vne grandeur eſt compoſée de deus grandeurs incomenſurables: elle eſt incomenſurable à l'vne & à l'autre. Et ſi vne grandeur eſt incomenſurable à l'vne de ſes parties, ſes parties ſont incomenſurables.

Que les grandeurs AB, BC, ſoient ſupoſées incomenſurables. Ie dis que la totale AC, eſt incomenſurable à chacune d'elles. Car s'il y auoit vne meſure comune d'AC, BC: meſurant la toute AC, & la partie BC, elle *a* meſureroit auſſi le reſte AB, & partant AB, BC, ſeroient comenſurables, contre l'hipoteſe.

a 3. *ax.*

Que ſi AC, eſt ſupoſée incomenſurable à l'vne de ſes parties BC; AB, BC, ſeront incomenſurables. Car ſi elles eſtoient comenſurables, la toute AC, *b* ſeroit comenſurable à toutes les deus, contre l'hipoteſe.

A—B—C

b 14. *p.*

COROL.

Si vne grandeur eſt incomenſurable à l'vne de ſes parties

parties: elle eſt auſſi incomenſurable à l'autre. Ce qui s'infere come en l'autre Corol.

ANOTAT.

Il eſt certain que ſi les grandeurs des deus dernieres propoſitions ſont des lignes, elles doiuent eſtre comenſurables ou incomenſurables de longueur, puiſqu'en chaque demonſtration il eſt parlé de comunes meſures.

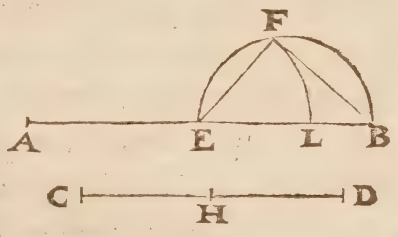
Aplication des nombres.

Il eſt aſſez aiſé à conoitre que 8 + ☒40. *compoſé de* 8. *& de* ☒40. *eſt incomenſurable à* 8. *& à* ☒40.

LEM. V. PROB. V.

Deus lignes droites inegales eſtans propoſées, diuiſer la plus grande en ſorte que le rectangle compris ſouz les ſegmens de cette diuiſion, ſoit egal à la quatriéme partie du quaré de la moindre.

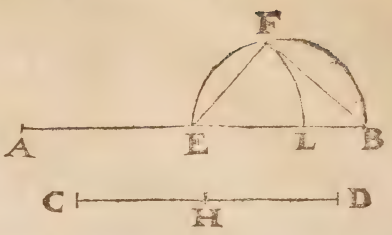
Que les lignes propoſées ſoient AB, CD, deſqueles il faut diuiſer la plus grande AB, en ſorte que le rectangle compris ſous les ſegmens de cette diuiſion ſoit egal à la quatriéme partie du quaré de CD, c'eſt à dire au[a] *quaré de la moitié de CD. Ayant diuiſé les lignes propoſées en deus parties egales, aus poins E, H, ſur EB, ſoit deſcrit le demy-cercle EFB, auquel ſoit*[b] *inſcrite la ligne FB, egale à CH, & ſoit tirée la ligne EF, à laquele ſi on prend EL, egale: ie dis que la ligne AB, eſt diuiſée au point L, ſelon qu'il eſt propoſé. Car le rectangle ALB, auec le quaré d'EL,*



[a] *Schol. 4. 2.*

[b] *1. 1.*

a 3. 2. *est a egal au quaré d'EB, c'est à dire aus quarez de EF, FB, ausquels le quaré*



b 47. 1. 31. 3. *d'EB, est b egal. Or le quaré d'EF, est egal au quaré d'EL, puisque les lignes EF, EL, sont egales par la construction, donc le rectangle ALT, auec le quaré d'EF, est egal aus quarez d'EF, FB : & partant si on ôte de part & d'autre, le quaré d'EF ; le rectangle ALB, sera*

c Sect. 4. 2. *egal au quaré d'FB, ou de son egale CH, dont le c quaré est egal à la 4e. partie du quaré de CD.*

ANOTAT.

Ce probleme est fort obscur & dificile à entendre, selon qu'il est proposé par Euclide, & sa construction bien plus longue que la nôtre. Ie me contenteray de raporter seulement les termes de la proposition pour en faire iuge le Lecteur : le reste se pourra voir chez les Comentateurs d'Euclide.

Deus lignes droites inegales estans donées, apliquer à la plus grande vn paralelograme rectangle égal à la 4e. partie du quaré de la moindre, en sorte qu'il y ait defaut d'vne figure quarée.

Or c'est en efet la mesme chose que diuiser la plus grande ligne en sorte que le rectangle de ses parties, soit egal à la 4e. partie du quaré de la moindre : car les côtez du paralelograme apliqué sont les mesmes que les segmens de nôtre diuision. Mais ie ne pense pas qu'il y ait persone qui n'auoüe que les termes dont nous nous seruons, sont sans comparaison de bien plus facile inteligence. Outre qu'on s'exemte en le proposant de cette sorte, de prouuer que le paralelograme apliqué est egal au rectangle compris sous les segmens faits par

l'aplication, puiſque nous ne parlons point du tout d'aplication, laquele auſsi n'eſt aucunement neceſſaire : & ie m'eſtone qu'il en ſoit fait icy aucune mention, puiſqu'en toutes les propoſitions ſuiuantes où ce Probleme peut ſeruir, il ne s'agit point d'apliquer iamais aucun rectangle, & qu'il ſufit de diuiſer ſimplement vne ligne droite ſelon que nous l'auons proposé.

Aplication des nombres.

Que les nombres donez ſoient 14. *&* 10. *deſquels il faut diuiſer* 14. *en deus parties qui multipliées l'vne par l'autre produiſent* 25. *qui eſt* $\frac{1}{4}$. *du quaré de* 10.

Or puiſque pour l'execution de ce Probleme en lignes, a eſté adiouté à la moitié de la plus grande, le côté de la diference des quarez des moitiez, telle qu'eſt E L, en la figure: ayant pris la diference de 49. *&* 25. *(quarez des moitiez) ſauoir* 24. *ſi on adiouste ſa racine quarée* R24. *à* 7. *moitié du plus grand nombre,* 7 + R24. *ſera le plus grand ſegment, & la meſme racine en eſtant otée, formera le moindre ſauoir* 7 — R24. *car ces deus nombres multipliez l'vn par l'autre produiſent* 25. *Ainſi les nombres donez eſtans* 12. *&* R80. *les parties de* 12. *ſeront* 10. *&* 2. *Et ſi on propoſe* 10. *&* 8. *les parties de* 10. *ſeront* 8. *&* 2.

LEM. VI.

Deus lignes inegales eſtans propoſées, ſi on diuiſe la plus grande en ſorte que le rectangle des ſegmens de cette diuiſion, ſoit egal à la 4^{e}_{1} partie du quaré de la moindre: ces ſegmens ſeront inegaus.

En la derniere figure que les ſegmens de la diuiſion proposée, ſoient AL, LB. Ie dis qu'ils ne ſont pas egaus. Car s'ils eſtoient egaus, ce rectangle ſeroit le quaré de la moitié

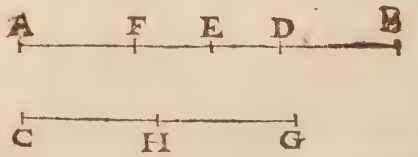
de la plus grande. Et parce qu'il doit eſtre auſsi egal au quaré de la moitié de la moindre ligne, les quarez des moitiez ſeroient egaus, & les moitiez egales, & partant auſsi les lignes a *proposées ſeroient egales, contre l'hipoteſe. Donc les ſegmens de cette diuiſion ſont inegaus.*

a 15. 5.

18. PROP. XVI. TEOR. XIV.

Deus lignes droites inegales eſtans propoſées, ſi on diuiſe la plus grande en ſorte que le rectangle des ſegmens de cette diuiſion, ſoit egal à la 4e. partie du quaré de la moindre, & que ces ſegmens ſoient comenſurables de longueur: le côté de la diference des quarez des lignes propoſées ſera comenſurable de longueur à la plus grande. Et ſi le côté de la diference des quarez eſt comenſurable de longueur à la plus grande, & qu'elle ſoit diuiſée en ſorte que le rectangle des ſegmens de cette diuiſion ſoit egal à la 4e. partie du quaré de la moindre: ces ſegmens ſeront comenſurables de longueur.

Que les lignes propoſées ſoient BA, GC, dont la plus grande BA, ſoit diuiſée ſelon le Lemme precedent, & que ſes ſegmens BD, DA, ſoient comenſurables de longueur. Ie dis que la diference des quarez de BA, GC, a pour côté vne ligne qui eſt comenſurable de longueur à BA. Puiſque les ſegmens BD, DA, ſont *b* inegaus, que la ligne BA, ſoit egalement diuiſée en E, & la ligne GC, en H; & ſoit priſe EF, egale à ED: Or parce que BA, eſt egalement diuiſée en E, & inegalement en D: le rectangle BDA, (c'eſt à dire le quaré d'HG) auec



b Lem. 6.

le quaré de ED, eſt *a* egal au quaré d'EB : donc le quaré de ED, eſt la diference des quarez d'EB, HG : & partant le quaré de la double DF, ſera la diference des quarez des doubles BA, GC, puiſqu'il y a meſme proportion des doubles BA, GC, à la double DF, que des ſimples EB, HG, à la ſimple ED: & par conſequent meſme proportion *b* entre les quarez des doubles, qu'entre les quarez des ſimples. Il faut donc prouuer que DF, eſt comenſurable de longueur à BA. Pource qu'EA, eſt egale à EB : & FE, à ED, les reſtes FA, DB, ſeront egaus. De plus, parce que les ſegmens DA, DB, ſont comenſurables, la toute AB, leur *c* ſera auſſi comenſurable, & partant auſſi FA, qui eſt egale à BD. Donc la meſure comune de toutes ces lignes meſurant la toute DA, & la partie FA, meſurera *d* auſſi le reſte DF, & partant BA, DF, ſont comenſurables de longueur.

a 5. 2

b 15. 5.

c 14. 5.

d 3. ax.

Que ſi on ſupoſe BA, DF, comenſurables de longueur: ie dis que BD, DA, le ſont auſſi. Car la comune meſure de BA, DF, meſurera *e* auſſi la grandeur reſtante compoſée de BD, FA: & partant BA, & la compoſée de BD, FA, ſont comenſurables. Or la compoſée de BD, FA, eſt comenſurable à chacune de ces parties puiſqu'elles ſont egales, & partant comenſurables : donc BA, BD, eſtans toutes deus comenſurables à la compoſée de BD, FA, ſont *f* comenſurables entre elles. Et partant la comune meſure de BA, BD, meſurera *g* auſſi la partie reſtante DA : donc BD, DA, ayans vne comune meſure ſont comenſurables de longueur par la definition.

e 3. ax.

f 10. 5.

g 3 ax.

Aplication des nombres.

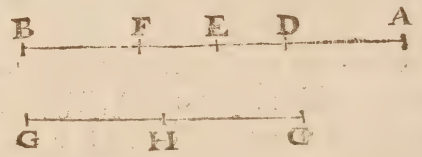
Que les lignes proposées ſoient B.200. *&* B.72 : *Or* B.200. *eſtant diuisée ſelon qu'il eſt proposé, les ſegmens ſeront* B.162. *&* B.2. *dont le produit eſt* B.324. *ou* 18. *quatriéme partie de* 72. *Et parce que les ſegmens ſont comenſurables de longueur eſtans entre eus come* 9. *à* 1. *le quaré de* B.200. *excede celuy de* B.72. *de* 128. *dont la Racine eſt à* B.200. *come* 4. *à* 5. *& partant* h *comenſurable. L'aplication des nombres à la*

h 5. 8.

conuerse, est facile par le moyen de celle-cy.

19. PROP. XVII. TEOR. XV.

Si deus lignes inegales estans propoſées, la plus grande est diuiſée ſelon le Lemme precedent, & que les ſegmens de cette diuiſion ſoient incomenſurables de longueur: le côté de la diference des quarez des lignes propoſées ſera incomenſurable de longueur à la plus grande. Que ſi le côté de la diference des quarez eſt incomenſurable de longueur à la plus grande: les ſegmens ſeront incomenſurables de longueur.



Premierement, ayant conſtruit come en la precedente, que les ſegmens B D, DA, ſoient incomenſurables de longueur: Ie dis que BA, & DF, (laquelle DF, ſera prouuée comme auparauant eſtre le côté de la diference des quarez) ſont incomenſurables de longueur. Car la toute *a* BA, ſera incomenſurable à ſes parties D A, (c'eſt à dire FB) & DB: & partant la toute B A, qui eſt incomenſurable à l'vne de ſes parties, ſauoir à la compoſée de DA, FB, (car la ſimple luy eſtant incomenſurable, *b* auſſi ſera la double) elle ſera auſſi *c* incomenſurable à la reſtante DF.

a 15. *p.*

b 12. *p.*

c Cor. 15. *p.*

Que les lignes BA, DF, ſoient maintenant incomenſurables de longueur. Ie dis que BD, DA, le ſont auſſi: car puiſque BA, eſt incomenſurable de longueur à DF, elle ſera auſſi *d* incomenſurable de longueur à la reſtante compoſée de DA, FB, & partant auſſi à la *e* moitié DA. Donc puiſque B A, eſt incomenſurable à ſa partie DA, les deus *f* parties BD, DA, ſont incomenſurables.

d Cor. 15. *p.*

e 12. *p.*

f 15. *p.*

Aplication des nombres.

Que les lignes proposées soient 10. *&* 14 : *les segmens de* 14. *seront* $7 + \text{R}24$. *&* $7 - \text{R}24$. *qui sont incomensurables de longueur. Aussi le quaré de* 14. *excede le quaré de* 10. *de* 96. *dont le côté* R96. *est incomensurable de longueur à* 14. *Et au contraire.*

Anotation.

Apres auoir traité des grandeurs comensurables & incomensurables : Euclide passe maintenant aus rationeles & irrationeles.

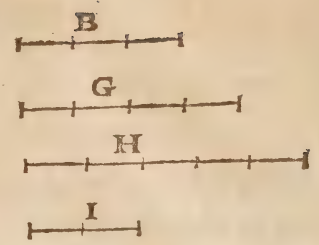
1. *Or nous auons deja dit sur la* 5. *definit. qu'il y a deus sortes de lignes rationeles, les vnes estans comensurables de longueur & de puissance à la proposée, les autres luy estans comensurables de puissance seulement.*

2. *Que si on considere des lignes rationeles comparées entre elles, il y en a encores de deus sortes, car les vnes sont comensurables de longueur entre elles; les autres comensurables de puissance seulement.*

3. *Les vnes & les autres sont de deus sortes, car les comensurables de longueur entre elles, sont ou toutes comensurables de longueur à la proposée, ou toutes ne luy sont comensurables que de puissance.*

4. *Les comensurables entre elles de puissance seulement, sont ou toutes comensurables de puissance seulement à la proposée, ou bien l'vne luy est comensurable de longueur, & toutes les autres de puissance seulement.*

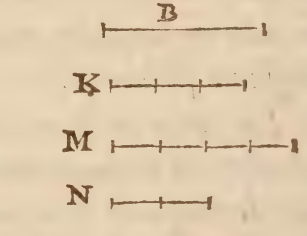
5. *Les rationeles comensurables de longueur de la premiere espece, se trouuent en cette sorte. Que la rationele proposée soit B, laquelle ayant diuisée en trois parties egales,*



C4. D5. F2.

ſoient pris autant de nombres qu'on voudra de rationeles, ſauoir C, D, F. Si donc on forme trois lignes G, H, I, composées chacune d'autant de parties egales à celles dont la proposée en contient trois, qu'il y a d'vnitez en chacun des nombres C, D, F: il eſt certain que ces trois lignes ſeront toutes a *comenſurables de longueur,* a An. 5. p. *& entre elles & à la proposée, puiſqu'elles ont meſmes proportions l'vne à l'autre que les nombres C, D, F, ont entre eus; & meſmes proportions à la proposée que chacun des meſmes nombres au nombre de la proposée* 3. *Et partant elles ſont par la definition, rationeles & comenſurables de longueur entre elles & à la proposée.*

6. *Pour trouuer la ſegonde eſpece de rationeles comenſurables de longueur, ſoit* b *trouuée la ligne K, incomenſurable de longueur ſeulement à la meſme proposée B: & ayant diuiſé K, en autant de parties egales qu'on voudra, qui ſoient repreſentées par le nombre L, ſoient formées les lignes M, N, ou tant d'autres qu'il ſera beſoin, composées chacune d'autant de parties egales à celles que contient K, qu'il y a d'vnitez aus nombres P, Q. Donc par la conſtruction les quarez de B, K, ſont comenſurables,* c 7. 1. *& auſſi les* c *quarez de K, M, N, puiſque ces trois dernieres ſont comenſurables de longueur: & partant les quarez de B, M, eſtans tous deus comenſurables à celuy de K, ſont* d 10. 1. *auſſi* d *comenſurables entre eus: & par la meſme raiſon le*



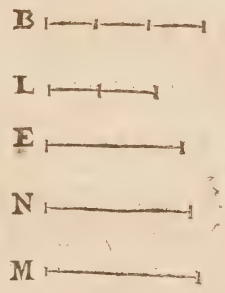
L3. P4. Q2.

quaré

quaré d'N, ſera comenſurable à celuy de B, come encore les quarez d'autant d'autres lignes qu'on aura fabriquées de la meſme façon, puiſqu'ils ſeront tous comenſurables à celuy de K. Et parce que des deus lignes comenſurables de longueur K, M, la ligne K, eſt incomenſurable de longueur à B, par la conſtruction; M, ſera a *auſſi incomenſurable de longueur à B; &* a 10. 9. *par la meſme raiſon N, & toutes les autres formées de meſme, ſeront incomenſurables de longueur à la proposée B. Et puiſqu'elles luy ont eſté prouuées comenſurables de puiſſance, & comenſurables de longueur entre elles, elles ſont les rationeles requiſes.*

Les rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement, dont l'vne ſoit comenſurable de longueur à la proposée, ſe formeront ainſi. Ayant b *formé la ligne L, comenſurable de longueur à la proposée B, ſoient* c *pris les trois nombres D, F, G, ou tant d'autres qu'on voudra, qui n'ayent pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, ny entre eus, ny au nombre C, quaré du nombre de la proposée, & ſoit fait come C, à chacun des nombres D, F, G, ainſi le quaré de B, à chacun des quarez des lignes E, N, M. Or il eſt certain par cette conſtruction, que les lignes B, E, N, M, ſont* d *comenſurables de puiſſance, puiſque leurs quarez ſont come nombre à nombre, mais non pas de* e *longueur, puiſqu'ils n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré. Et ainſi les lignes E, N, M, ſont rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement & entre elles, & à la proposée. De plus, la ligne L, eſt rationele,*

b 11. 6.



c Lem. 3.

C 9.
D 3. F 7. G 8.

d 5. 8.

e 7. 8.

eſtant comenſurable de longueur à la proposée B, par la conſtruction. Et parce que des deus lignes comenſurables de longueur B, L, la ligne B, eſt incomenſurable de longueur à
a 12. p. chacune des lignes E, N, M, l'autre[a] ligne L, leur ſera auſsi incomenſurable de longueur. Mais parce que les quarez de L, E, (le meſme ſe doit entendre des quarez de L, N, & de L, M) ſont tous deus comenſurables à celuy de B, ils ſe-
b 10. p. ront comenſurables[b] entre eus, c'eſt à dire, que les lignes L, E, N, M, ſont comenſurables de puiſſance ſeulement. Or elles ſont toutes rationeles, puiſqu'elles ſont toutes comenſurables ou de longueur ou de puiſſance à la proposée E. Donc, &c.

8. Le moyen de trouuer l'autre eſpece de rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement, n'eſt pas diferent de celuy de trouuer ces dernieres, car laiſſant à part la ligne L, comenſurable de longueur à la rationele proposée B, les autres luy ſeront comenſurables de puiſſance ſeulement, & entre elles auſsi, come il a eſté demontré. Que ſi on en vouloit dauantage, il ne faudroit que trouuer encores d'autres nombres qui n'euſſent ny entre eus, ny à aucun des precedens, proportion de nombre quaré à nombre quaré, & operer come auparauant.

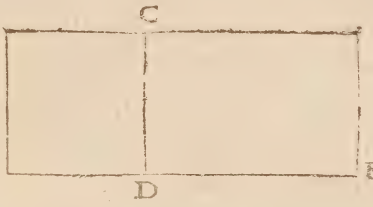
Clauius adioute à ces deus eſpeces de lignes rationeles, tant comenſurables de longueur que comenſurables de puiſſance encores vne 3e, lors, dit-il, que l'vne des rationeles eſt egale à la proposée: mais il ſemble qu'il ſoit inutile d'en parler, puiſqu'il n'y a perſone qui ne ſache que pour ſe ſeruir de la proposée parmy les autres, il ne faut qu'en prendre vne qui luy ſoit egale.

LEM. VII.

Deus lignes droites eſtans propoſées, come la premiere eſt à la ſegonde, ainſi le quaré de la premiere au rectangle

de toutes les deus. Et come la segonde à la premiere, ainsi leur rectangle au quaré de la premiere.

Que le rectangle CF, soit contenu sous les lignes CD, DF: & sur CD, soit fait le quaré CG. Il est certain qu'il y a a mesme proportion de CG, quaré de CD, à CF, rectangle, de toutes les deus, que de CD, c'est à dire GD, son egale, à DF. Et aussi mesme proportion de CF, à CG, que d'FD, à DG, ou DC.

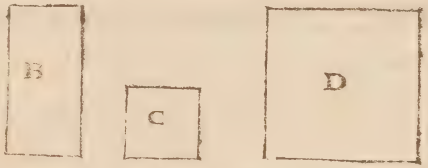


a 1. 6.

Lemme VIII.

Tout espace comensurable à vn espace rationel, est rationel.

Que l'espace B, soit comensurable à l'espace rationel C. Ie dis que B, est rationel. Que D, soit le quaré de la rationele proposée. Puisque C, est rationel, il sera comensurable au rationel D. Or B, est aussi comensurable à C; donc B, D, estans tous deus comensurables à C, b sont comensurables entre eus. Et partant B, comensurable au quaré de la rationele proposee, est rationel par la definition.



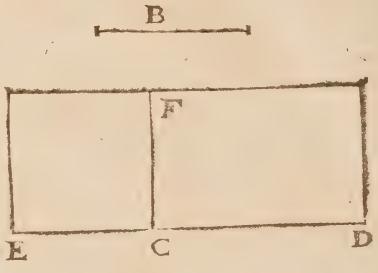
b 10. 9.

Prop. XVIII. Teor. XVI.

20. & 22.

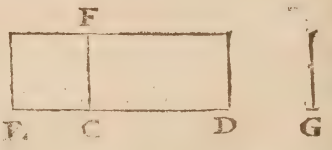
Le rectangle de deus lignes rationeles comensurables de longueur, est rationel. Mais le rectangle

de deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement, eſt irrationel. Et la ligne droite dont le quaré eſt egal à ce dernier rectangle eſt irrationele, & s'apele moyene ou mediale.



Que la ligne rationele propoſée ſoit B, à laquele les lignes CF, CD, qui comprenent le rectangle FD, ſoient toutes deus comenſurables ou de longueur, ou de puiſſance ſeulement, pourueu qu'elles ſoient comenſurables de longueur entre elles. Ie dis que le rectangle FD, eſt ratio-
a Lem. 7 nel. Car ayant ſur FC, deſcrit le quaré FE, il y *a* aura meſme proportion d'EF, à FD, que d'EC, à CD. Or la ligne EC, ou CF, ſon egale, eſt comenſurable de longueur à CD,
b Anct. 8. p. par l'hipoteſe; donc *b* le rectangle EF ſera comenſurable au rectangle FD. Et partant EF, eſtant rationel, come quaré de la rationele FC, le rectangle FD, ſon comenſurable, ſera
c 4 def. *c* auſſi rationel.

Que ſi les lignes EC, CD, ne ſont comenſurables que de puiſſance come en la ſegon-
d Anot. 8. p. de figure, les *d* rectangles EF, FD, ſeront incomenſurables. Et partant FD, incomenſurable au rationel FE, ſe-
e 10. def. ra *e* irrationel.



La ligne G, qui peut cet eſpace irrationel, ou dont le quaré luy eſt egal, s'apele moyene ou mediale, come eſtant moyene proportionele entre deus lignes rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement.

Corol. I.

Le rectangle compris ſous vne ligne rationele &

ſous vne irrationele ; eſt irrationel. Car en la meſme deniere figure ſi CD, eſt irrationele, & FC, ou EC, rationele come auparauant, elles ſeront incomenſurables par la definition, & ainſi on prouuera come en la ſegonde partie de la propoſition, que le rectangle FD, eſt irrationel.

Corol. II.

21. prop.

Il s'enſuit auſſi de cette propoſition que toute eſpace rationel apliqué à vne ligne rationele, a pour largeur vne ligne rationele, comenſurable de longueur à la ligne de l'aplication.

Car ſi le quaré de la rationele G, en la derniere figure eſtant apliqué à la rationele CF, la largeur CD, eſtoit irrationele, le rectangle FD, ſeroit irrationel par le premier Corolaire. Et ſi la largeur FD, eſtant rationele, n'eſtoit comenſurable que de puiſſance à la ligne de l'aplication CF, le rectangle FD, ſeroit encor irrationel par cette propoſition : leſquelles conſequences ſont toutes deus contre l'hipoteſe.

Anotation.

Cette propoſition & ſes deus Corolaires ſont chez Euclide quatre Teoremes à part, mais leurs demonſtrations eſtans ſi ſemblables, nous n'auons pas iugé neceſſaire de les ſeparer.

Au reſte, de meſme que la moyene ou mediale, a pris ce nom de ce qu'elle eſt moyene proportionele entre deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement, auſſi ſon quaré, ou le rectangle de ces deus rationeles doit eſtre apelé eſpace moyen

ou medial, come estant a moyen proportionel entre leurs quarez. a Sco. 22.6.

Or il ne faut pas s'imaginer que tout espace moyen soit compris sous deus lignes rationeles comensurables de puissance seulement; car il sera demontré cy-apres, qu'il peut estre compris aussi sous deus moyenes, aus prop. 21. & 22. de façon que le rectangle de deus rationeles comensurables de puissance seulement, est bien toujours moyen, mais tout espace moyen n'est pas toujours compris sous deus semblables rationeles. Il est neanmoins toujours vray de dire, que tout espace moyen est egal à quelque autre espace compris sous deus rationeles comensurables de puissance seulement, autrement la ligne qui pouroit vn tel rectangle, ne seroit pas mediale n'estant pas moyene proportionele entre deus semblables lignes.

Aplication des nombres.

Que les lignes comensurables de longueur, soient ℞18. & ℞8. leur produit sera ℞144. c'est à dire 12. Que si on propose les incomensurables de longueur ℞12. & ℞5. leur produit sera ℞60. nombre irrationel lors qu'il represente vn quaré ou rectangle; sa racine est ℞℞60.

De plus, le produit du nombre rationel ℞3. & de l'irrationel ℞℞5. est ℞℞45. nombre irrationel.

En dernier lieu, le nombre plan rationel 20. estant diuisé par ℞2. aura pour quotient ℞200. comensurable de longueur à ℞2.

Prop. XIX. Teor. XVII.

23.

Le quaré de la mediale estant apliqué à vne rationele, a pour largeur, vne rationele incomensurable de longueur à la ligne d'aplication.

Que le quaré de la ligne mediale M, eſtant apliqué à la rationele B C, ait pour largeur la ligne C D. Ie dis que cette largeur C D, eſt rationele, & incomenſurable de longueur à la ligne d'aplication B C. Car puiſque la ligne M, eſt moyene, ſon *a* quaré ſera egal à quelque rectangle compris ſous deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement: que ce ſoit au rectangle EG, lequel ſera par conſequent egal à B D; & *b* partant BC, ſera à E F, come FG, à C D. Or BC, E F, ſont comenſurables de puiſſance pour le moins, puiſqu'elles ſont rationeles par l'hipoteſe; *c* donc FG, CD, ſeront auſſi comenſurables de puiſſance pour le moins; & partant F G, eſtant ſupoſée rationele, C D, ſera auſſi rationele. Or C D, ne peut eſtre comenſurable de longueur à B C: car l'eſpace BD, ſeroit *d* rationel, contre l'hipoteſe.

a 18. 9.
b 14. 6.
c Cor. 8. 9.
d 18. 9.

Corol.

Le rectangle d'vne rationele & d'vne irrationele n'eſt pas eſpace moyen. Car s'il eſtoit eſpace moyen, eſtant apliqué à vne rationele, il *d* feroit vne largeur rationele, par cette prop. & partant ne ſeroit pas compris ſous vne rationele & vne irrationele, contre l'hipoteſe.

d 19. 9.

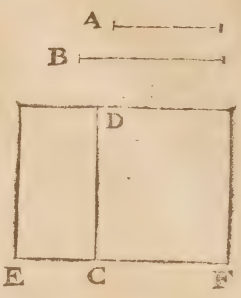
Aplication des nombres.

Que le quaré du nombre medial ℞ 40. *ſauoir* ℞ 40. *ſoit apliqué au nombre rationel* ℞ 2. *ſon quotient ſera* ℞ 20. *qui eſt incomenſurable à* ℞ 2. *puiſque ces deus nombres ſont entre eus come* ℞ 10. *à* 1.

Prop. XX. Teor. XVIII. 24.

Si vne ligne droite eſt comenſurable à vne ligne moyene, elle eſt auſſi moyene.

Que la ligne B, soit comensurable de longueur ou de puissance à la ligne mediale A. Ie dis que B, est mediale. Car ayant aplicqué à la rationele CD, les rectangles ED, DF, egaus aus quarez des lignes A, B; la ligne EC, *a* sera rationele incomensurable de longueur à CD. Et parce que les lignes A, B, sont comensurables, leurs quarez c'est à dire ED, DF, seront aussi comensurables. Or *b* come ED, à DF, ainsi EC, à CF: donc *c* les lignes EC, CF, sont comensurables de longueur, & partant EC, ayant esté prouuée rationele, CF, sera aussi rationele. Et parce qu'EC, est comensurable de longueur à CF: & incomensurable de longueur à CD; CF, sera aussi *d* incomensurable de longueur à CD; & partant estant rationele, ne luy sera comensurable que de puissance. Donc le *e* rectangle DF, sera irrationel, & la ligne B, dont le quaré est egal à ce rectangle, sera mediale.



a 19 *p.*

b 1. 6.

c *Anot.* §. *p.*

d 22. *p.*

e 18. *p.*

Corol.

Tout espace comensurable a vn espace moyen, est aussi moyen: car DF, est icy demontré moyen sur ce qu'il est comensurable au moyen DE.

Anotat.

Encore que toute ligne comensurable à vne ligne moyene, soit moyene, neanmoins toute ligne moyene n'est pas comensurable à vne moyene, come nous ferons voir sur la 25. prop.

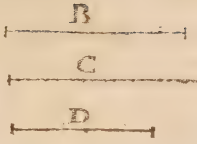
Lem. VIII. Prob. VI.

Trouuer deus moyenes comensurables de longueur, & deus autres comensurables de puissance seulement.

Ayant trouué la ligne moyene B, (en la prenant moyene proportionele entre deus rationeles comensurables de puis-

sance

ſance ſeulement) ſoient trouuées les lignes, C, comenſurable de longueur, & D, comenſurable a de puiſſance ſeulement à B. Elles ſeront b toutes deus moyenes, par la derniere propoſition, & telles qu'il eſt requis, par leur conſtruction.

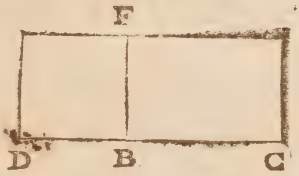


a 9. p.

b 20. p.

PROP. XXI. TEOR. XIX. 25.

Le rectangle de deus moyenes comenſurables de longueur eſt moyen.



Que le rectangle FC, ſoit compris ſous les moyenes comenſurables de longueur BF, BC. Ie dis que cet eſpace eſt moyen. Ayant ſur FB, deſcrit le quaré DF, les rectangles DF, FC, ſeront *c* en meſme proportion que les lignes DB, (c'eſt à dire FB, ſon egale) & BC. Or les lignes FB, BC, ſont comenſurables de longueur, donc auſſi les *d* rectangles DF, FC, ſont comenſurables; & partant l'eſpace DF, eſtant moyen, le rectangle FC, le *e* ſera auſſi.

c 1. 6.

d Anot. 8. p.

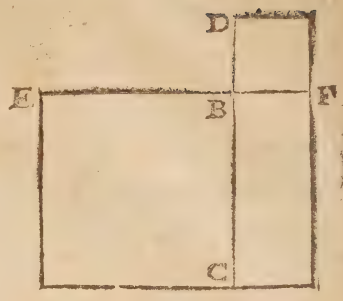
e Cor. 20. p.

Aplication des nombres.

Que BF, ſoit ℔ 5. & BC, ℔ 80. leſquels nombres ſont come 1. à 2. le rectangle FC, ſera ℔ 20. qui eſt vn eſpace moyen.

LEMME IX. Lem. 54. p.

Le rectangle de deus lignes droites, eſt moyen proportionel entre leurs quarez.



Que les lignes BC, BF, facent le rectangle FC, & sur BC, soit décrit le quaré CE, & sur BF, le quaré DF. Ie dis que CF, est moyen proportionel entre DF, EC. Car DF, est à FC, come DB, à BC; c'est à dire, come FB, à BE, puisqu'il y a entre DB, BF, proportion d'egalité de mesme qu'entre BC, BE. Or come FB, à BE, ainsi FC, à CE.
a 21. 5. *Donc a come DF, à FC, ainsi FC, à CE, c'est à dire que FC, est moyen proportionel entre DF, EC.*

Aplication des nombres.

Que DB, soit 4. *BC,* 2. *leurs quarez seront* 16. *&* 4. *& leur produit sera* 8. *moyen proportionel entre* 16. *&* 4.

Prop. XXII. Teor. XX.

26.

Le rectangle de deus moyenes comensurables de puissance seulement, est ou rationel ou moyen.

1. Que le rectangle CD, soit compris sous les moyenes comensurables de puissance seulement BC, BD. Ie dis que ce rectangle est ou rationel, ou moyen. Ayant décrit sur BC, BD, leurs quarez GC, KD: soient apliqués à la rationele propoſée LM, ou à ses egales NP, QR, les rectangles LP, egal à GC; NR, à CD: & QS, à KD.

2. Et parce que les lignes BC, BD, sont moyenes comensurables de puissance, leurs quarez GC, KD, c'est à dire, les rectangles LP, QS, seront moyens, & comensurables. Or *b* comme LP, à QS, ainsi MP, à RS, & partant MP, RS, sont comensurables de longueur.
b 1. 6.

3. De Plus LP, QS, estant apliquez à la rationele LM, les largeurs MP, RS, seront *c* rationeles, incomensurables
c Aut. 8. P.

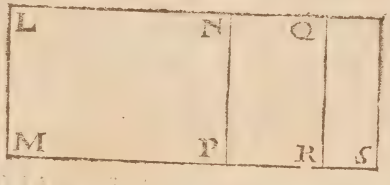
de longueur à LM, & par. 19
tant estant rationeles & comensurables de *a* longueur entre elles, leur rectangle *b* sera rationel.

a 2. 4.

b 18. p.

4. Et parce que les rectangles GC, CD, DK, sont proportionaus, leurs *c* egaus LP, NR, QS, seront aussi proportionaus; & partant les trois lignes MP, PR, RS, qui sont en *d* mesme proportion, seront aussi proportioneles, & le quaré de PR, *e* egal au rectangle d'MP, RS.

c Lem. der.



d 1. 6.

e 17. 6.

5. Or le rectangle d'MP, RS, a esté demontré *f* rationel; donc le quaré de PR, est rationel, & PR, rationele. Et partant si PR, est comensurable de longueur à LM, ou à son egale NP, le rectangle NR, c'est à dire CD, compris sous les moyens comensurables de puissance seulement. BC, BD; sera *g* rationel. Que si PR, n'est comensurable que de puissance à NP, le mesme rectangle sera *h* moyen.

f 3. art.

g 18. p.

h 18. p.

ANOTATION.

Toute cette demonstration iusques à la derniere partie du dernier article, conuient aussi bien aus moyenes comensurables de longueur, qu'à celles qui ne sont comensurables que de puissance, come il est aisé à conoitre; mais il est certain que lors qu'elles sont comensurables de longueur, l'on ne peut pas reuoquer en doute si la largeur faite par l'aplication du rectangle proposé, à la rationele, (qui est en cette figure la ligne PR) est comensurable ou incomensurable de longueur, à la proposée, puisqu'elle ne luy peut estre i *comensurable que de puissance, le rectangle proposé estant touiours* k *moyen; ce qui*

i 19. p.

k 21. p.

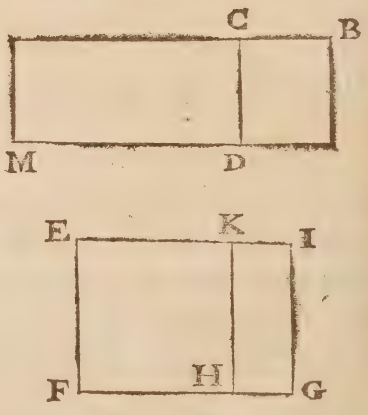
ne ſe peut prouuer des moyenes incomenſurables de longueur, & comenſurables de puiſſance. Car en la figure de la 21. prop. ſi DB, BC, ne ſont comenſurables de longueur, on ne ſauroit prouuer que les rectangles DF, FC, ſoient comenſurables, ny, par conſequent que l'eſpace FC, ſoit medial.

Aplication des nombres.

Que BC, ſoit R/8 BD, R/2. CD, ſera R/16. c'eſt à dire 2. qui eſt nombre rationel. Mais ſi BC, eſtoit R/12. & BD, R/3. CD, ſeroit R/36. ou R26. nombre irrationel pour les ſuperficies.

27. Prop. XXIII. Teor. XXI.

La diference de deus eſpaces moyens n'eſt pas eſpace rationel.



1. Que la diference des deus moyens MB, MC, ſoit l'eſpace DB. Ie dis que DB, n'eſt pas eſpace rationel, autrement qu'il ſoit rationel, s'il eſt poſſible. Que la rationele propoſée ſoit EF, à laquelle ſi on aplique les rectangles EG, EH, egaus à MB, MC, le rectangle KG, ſera egal à DB, & les largeurs FG, FH, *a* ſeront rationeles incomenſurables de longueur à EF, mais parce que KG, eſt ſupoſé rationel, HG, *b* ſera rationele comenſurable de longueur à EF, & partant *c* incomenſurable de longueur à FH.

a 19. p.
b 18. p.
c 12. p.

2. Or come FH, à HG, *d* ainſi le quaré de FH, au rectangle FHG, donc le quaré d'FH, & par *e* conſequent auſſi le quaré d'HG, qui luy eſt comenſurable, (puiſque FH, HG,

d 1. 6.
e 12. p.

ſont rationeles par le premier art.) *a* ſont incomenſurables au rectangle FGH, & auſſi au *b* double du meſme rectangle. *a* 1. art. *b* 12. p.

3. Et par conſequent tout le compoſé des meſmes quarez & du meſme rectangle pris deus fois, c'eſt à dire le quaré *c* d'FG, eſt *d* incomenſurable au compoſé des meſmes quarez. *c* 4. 2. *d* 15. p.

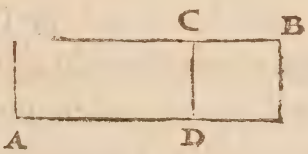
4. Or le compoſé des quarez eſt rationel, puiſqu'HG, HF, ſont *e* rationeles : donc le quaré d'FG, qui luy eſt incomenſurable, ſera irrationel, & partant FG, irrationele, ce qui eſt abſurde, puiſqu'elle a eſté *f* prouuée rationele. *e* 1. art. *f* 1. art.

5. Donc l'eſpace KG, diference des deus moyens EG, EH, ou (ce qui eſt la meſme choſe) DB, diference d'MB, MC, n'eſt pas eſpace rationel.

ANOTAT.

La diference des deus moyens comenſurables, eſt eſpace moyen; mais celle des deus rationaus, eſt ~~egal~~ *eſpace rationel.*

Que la diference des deus eſpaces moyens comenſurables AB, DB, ſoit AC. Ie dis que AC, eſt moyen. Car l'eſpace AB, eſtant comenſurable à ſa partie DB, ſera auſſi g *comenſurable à ſon autre partie AC, laquelle par conſequent ſera* h *eſpace moyen.*



g Cor. 14. p. *h* Cor. 20. p.

Que ſi on ſupoſe que les rectangles AB, DB, ſoient rationaus, AC, ſera comenſurable à AB, par la meſme raiſon, & partant ſera rationel.

Aplication des nombres.

Si MB, eſt ℞27. *MC,* ℞3: *DB, ſera* ℞12, *qui eſt nombre irrationel pour les rectangles.*

PROP. XXIV. PROBL. VII. 28.

Trouuer deus moyenes comenſurables de puiſſan-

ce ſeulement, dont le rectangle ſoit rationel.

a Au. 27. p. 1. Ayant *a* trouué deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement B, C, ſoit priſe

6 b 13. p. leur *b* moyene proportionele D, & ſoit fait come B, à D, ainſi C, à F. Ie dis que les lignes D, F, ſont moyenes, comenſurables de puiſſance ſeulement, & que leur rectangle eſt rationel.

B. D. C. F.

c 18. p. 2. Premierement, la ligne D, eſt *c* moyene par la conſtruction: & parce que come B, à D, ainſi C, à F: en permutant come B, à C, ainſi D, à F. Or B, C, ſont comenſurables

d Cor. 8. p. de puiſſance ſeulement: donc *d* auſſi D, F, ſeront comenſurables de puiſſance ſeulement; & partant D, eſtant moyene,

e 10. p. F, ſa comenſurable ſera *e* auſſi moyene.

f 1. Art. 3. Segondement, parce que come B, à D, c'eſt à dire, *f* come D, à C, puiſque c'eſt vne meſme proportion, ainſi C, à F, le rectangle de D, F, ſera egal au quaré de C: lequel par conſequent eſt rationel, puiſque C, eſt rationele.

Aplication des nombres.

Que B, ſoit ℞8. *& C* 2: *D, ſera* ℞32. *& F,* ℞8. *qui ſont incomenſurables de longueur eſtant come* ℞2. *à* 1. *mais leurs quarez ſont en proportion double: & leur produit eſt* ℞256. *ou* 4. *eſpace rationel.*

29. ## Prop. XXV. Probl. VIII.

Trouuer deus moyenes comenſurables de puiſſance ſeulement, dont le rectangle ſoit moyen.

g Au. 27. p. 1. Soient *g* trouuées les trois rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement B, D, F, & entre B, D, ſoit priſe la moyene proportionele C; puis aus trois D, F, C, la 4e proportionele G. Ie dis que C, G, ſont moyenes comenſurables de puiſſance ſeulement, & que leur rectangle eſt moyen.

B. C. D. F. G.

2. Premierement, C, eſt *a* moyene par la conſtruction, eſtant moyene proportionele entre deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement. Et parce que C, eſt à G, come D, à F, & que D, F, ne ſont comenſurables que de puiſſance, C, G, ne ſeront *b* auſsi comenſurables que de puiſſance: & partant G, eſtant comenſurable à la moyene C, eſt *c* auſſi moyene. *a* 18. 9. *b* Cor. 8. 9. *c* 20. 9.

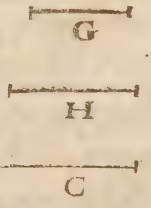
3. De plus, puiſque come D, à F, ainſi C, à G: & en permutant come D, à C, ainſi F, à G. Or come D, à C, *d* ainſi C, à B. Donc come C, à B, ainſi F, à G. Et partant le *e* rectangle de C, G, eſt egal à celuy de B, F: lequel dernier rectangle *f* eſtant moyen, le rectangle de C, G, ſon egal, ſera auſſi moyen. Et partant les moyenes C, G, ſont les requiſes. *d* 1. art. *e* 16. 9. *f* 18. 9.

Aplication des nombres.

Que B, ſoit ℞8, *D,* ℞5. F, ℞10: *C, ſera* ℞40. *& G,* ℞160. *qui ſont* g *incomenſurables de longueur, eſtant come* 1. *à* ℞2; *mais leurs quarez ſont en proportion double. Et leur rectangle eſt* ℞[illegible]. 80. g 7. 9.

Anotation.

Clauius promet en la 24*e, ou ſelon nous en la* 20*e, propoſition, d'enſegner à trouuer deus moyenes incomenſurables de puiſſance: ce qu'il n'execute qu'en la* 36*e. ou ſelon nous en la* 32*e. come ſi ce Probleme ne ſe pouuoit reſoudre plutot, & qu'il dependit de toutes les propoſitions precedentes. Neanmoins il eſt facile d'en venir à bout par cetuy-cy. Car ayant les deus moyenes C, G, ſi on prend leur moyene proportionele H, ſon quaré ſera egal à leur rectangle, lequel eſt moyen, & par conſequent, elle eſt moyene: Et parce que le quaré de C, eſt au quaré de H, come C, à G (leſqueles C, G, ſont par la conſtruction incomenſurables de longueur) les* h *quarez de* h 6. 9.

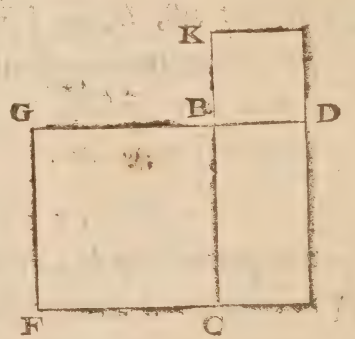


a Anot. 8. p. C, H, seront a incomensurables: & ainsi C, H, sont moyenes incomensurables de puissance.

Or de cette derniere sorte de moyenes, Euclide n'en dit mot en tout son disiéme liure, se contentant de parler des comensurables de longueur, & des comensurables de puissance seulement, disant que le rectangle des premieres est touiours moyen, & celuy des dernieres, tantôt rationel & tantôt moyen.

Que si on demande quel sera le rectangle des incomensurables de puissance, on peut dire qu'il est simplement irrationel, & non pas moyen.

Car que le rectangle C, D, soit compris sous les moyenes incomensurables de puissance B C, BD, & soit faite entierement la mesme construction qu'en la 22e. proposition. Or on prouuera comme là mesmes, que les lignes M P, R S, seront rationeles. Mais parce que BC, BD, sont incomensurables de puissance, les quarez GC, KD, c'est à dire les rectangles LP, Q S, seront incomensurables, & les lignes MP, RS, qui sont en mesme proportion, b incomensurables de longueur. Et partant le c restangle d'MP, RS, sera moyen, c'est à dire le quaré de PR, (car PR, sera prouuée estre leur moyene proportionele comme en la 22e.) & la ligne PR, sera par consequent moyene. Et ainsi le rectangle NR,



b Anot. 8. p.

c 18. p.

NR, (c'eſt à dire ſon egal CD,) eſtant compris ſous la rationele NP, & l'irrationele PR, ſera a irrationel : & ne ſera pas moyen, puis qu'eſtant apliqué à la rationele NP, ſa largeur RP, eſt moyene, & non pas rationele, telle b qu'eſt la largeur d'vn eſpace moyen.

a 21. 10. 18. p.

b 19. p.

Lem. X. Prob. IX.

Trouuer deus nombres plans ſemblables.

Soient pris quatre nombres proportionaus A, B, C, D, & que le produit des deus premiers ſoit F, & celuy des derniers, G. Il eſt certain qu'F, G, ſont plans c ſemblables, puiſque leurs côtez ſont proportionaus.

A 3 C 6.
B 4 D 8.
F 12 G 48.

c 17. def. Arit.

Lem. XI. Prob. X.

Trouuer deus nombres quarez, dont la ſomme ſoit quarée.

1. *Soient trouuez les nombres plans ſemblables AB, & C, tous deus pairs, ou tous deus impairs : ce qui ſe fera en prenant tous leurs côtez pairs, ou tous impairs, car vn d pair multipliant vn pair, produit vn pair: & e l'impair multipliant vn impair, produit vn impair.*

A...E...D..B
C..

d 22. p. Arit.

e 24. p. Arit. Coral. 24. p. A

2. *Et parce que ſi d'vn pair on ote vn pair, ou d'vn impair vn impair, le f reſte eſt pair; otant du nombre AB, le nombre DB, qui ſoit egal à C, le reſte AD, ſera pair. Ie dis qu'en diuiſant AD, en deus parties egales au point E, le produit d'AB, BD, lequel g eſt quaré, & le quaré d'ED, ioins enſemble, font vne ſomme qui eſt quarée.*

f 20. & 21. p. Ar.

g 2. Cor. 13. p. Ar.

3. *Car puiſqu'AD, eſt diuiſé egalement en E, & que le*

le nombre DB, luy est adiouté, le produit d'AB, BD, auec le quaré d'ED, sera egal [a] *au quaré d'EB. Et partant les deus quarez sauoir le produit d'AB, BD, qui est quaré,* [b] *& le quaré d'ED, ioins ensemble, composent vn quaré.*

A...E...D..B
C..

a 6. 2.

b 2 art.

Corol.

On peut aussi par le moyen de ce Probleme, trouuer deus nombres quarez, dont la diference soit quarée. Car la diference d'entre les quarez d'EB, ED, est le produit d'AB, BD, lequel est quaré.

Et partant on trouuera aussi deus nombres quarez, dont la diference ne sera pas quarée, en prenant les nombres AB, BD, plans dissemblables, car alors leur produit, qui est la diference des quarez d'EB, ED, ne sera pas nombre quaré, autrement AB, DB, seroient [c] plans semblables.

A..E..D..B

c Cor. 16. 8. Ar.

Le mesme se fera encores en diuisant vn nombre quaré en deus nombres, dont l'vn soit quaré & non pas l'autre, come 16. en 12. & 4.

Lem. XII. Probl. XI.

Trouuer deus nombres quarez dont la somme ne soit pas quarée.

Soient pris deus nombres quarez AC, CB, qui ayent mesme proportion que l'vnité à quelque nombre quaré; car l'vnité representant toutes sortes de nombres figurez, soit cubes, soit quarez, &c. à proportion à tout nombre quaré, de nombre quaré à nombre quaré. Ie dis que la somme AB, n'est pas quarée.

A 4 C 16 B
20.
G. D....F

Soit prise l'vnité GD, & le quaré DF, à qui l'vnité

ait meſme proportion qu'AC, à CB. Puiſque les nombres GF, DF, ne diferent que de l'vnité, il n'y aura entre eus aucun moyen proportionel; car il n'y a meſme aucun autre nombre quel qu'il ſoit. Et partant GF, DF, n'auront pas proportion de nombre quaré à nombre quaré; car s'ils l'auoient, il tomberoit entre eus vn [a] *moyen proportionel.* a Cor. 14. p. Arit.

3. *Et parce que come GD, à DF, ainſi AC, à CB; auſſi en compoſant come GF, à DF, ainſi AB, à CB. Donc puiſque GF, DF, n'ont pas* [b] *proportion de nombre quaré à nombre quaré, AB, CB, n'auront pas non plus cette proportion.* b 2. art.

4. *Et partant puiſque CB, eſt quaré par la conſtruction AB, ne ſera pas quaré, car s'ils eſtoient tous deus quarez, ils auroient neceſſairement proportion de nombre quaré à nombre quaré, contre ce qui a eſté prouué.*

COROL.

Par le moyen de ce probleme on trouuera aiſément deus nombres, dont la ſomme n'ait proportion ny à l'vn ny à l'autre de nombre quaré à nombre quaré, puiſque les parties ſont quarées & non pas la ſomme.

Ce qui ſe fera auſſi en diuiſant vn nombre quaré en deus nombres qui ne ſoient pas quarez.

ANOTAT.

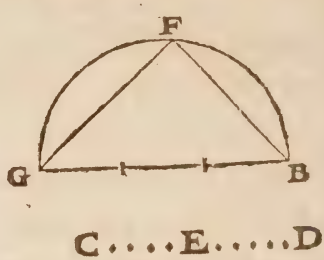
Chacun ſait combien la demonſtration ordinaire de ce Lemme eſt longue & ennuyeuſe, & que d'ailleurs elle ne conuient que des deductions à l'impoſſible. Ie ne penſe pas que perſone trouue étrange, ſi nous l'auons obmiſe, pour en ſubſtituer à la place vne afirmatiue, & qui eſt beaucoup plus facile & plus ſuccincte.

PROP. XXVI. PROBL. XII.

30.

Trouuer deus rationeles comensurables de puissance seulement, dont la plus grande soit comensurable de longueur au côté de la diference de leurs quarez.

a Cor. 11 pr. Lem. 1. Ayant trouué *a* les deus nombres quarez CD, CE, dont la diference ED, ne soit pas quarée, soit fait come CD, à ED, ainsi le quaré de la rationele proposée GB, au quaré de GF: & ayant descrit sur GB, le demy-cercle GFB, & inscrit la ligne GF, soit tirée la ligne FB. Ie dis que les lignes GB, GF, sont les rationeles requises.



2. Premierement, il est certain que le quaré d'FB, est la *b* diference de leurs quarez. Et parce que les quarez de GB, GF, sont come les nombres CD, DE, qui n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré: les lignes GB, GF, *c* 7. & 8. p. seront comensurables *c* de puissance seulement & rationeles, puisque GB, est la proposée, & que GF, luy est comensurable.

b 4. Lem

3. De plus, parce que come CD, à ED, ainsi le quaré de GB, à celuy de GF, par conuersion come CD, nombre quaré au nombre quaré CE, diference de CD, DE, ainsi le quaré de GB, sera au quaré d'FB, diference des quarez de GB, GF. *d* 7. p. Et par consequent GB, FB, sont *d* comensurables de longueur.

4. Les lignes GB, GF, sont donc rationeles comensurables *e* de puissance seulement: & la plus grande GB, est comensurable de longueur au côté de la diference des quarez, qui est FB.

e 8. diff.

ANOTAT.

On pouroit aussi au lieu des nombres quarez CD, CE,

prendre deus plans ſemblables, dont la diference ne fut pas ſemblable à l'vn des deus, & la demonſtration n'en ſeroit aucunement changée. Car en la derniere figure ſi les nombres CD, CE, ſont plans ſemblables, & leur diference diſſemblable au plus grand CD, les nombres CD, DE, n'auront pas proportion de nombre quaré à nombre quaré; & partant les lignes GB, GF, ſeront come auparauant, comenſurables de puiſſance ſeulement; mais CD, CE, eſtant plans ſemblables, a auront proportion de nombre quaré à nombre quaré, & partant auſſi les quarez de GB, BF, par la meſme raiſon qu'auparauant: & ainſi GB, FB, ſeront comenſurables de longueur. a 115. 9. Ar.

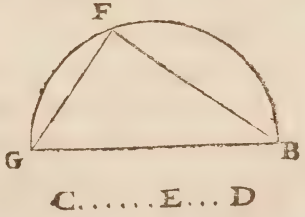
Aplication des nombres.

CD, eſtant 9. & CE, 4: ED, ſera 5. ſi donc GB, eſt poſé 3. GF, ſera R 45. *& FB, 2. comenſurable à 3.*

Mais ſi CD, eſt 8. & DE, 6: CE, ſera 2: & GB, eſtant 4. GF, ſera R 12. *& FB. 2.*

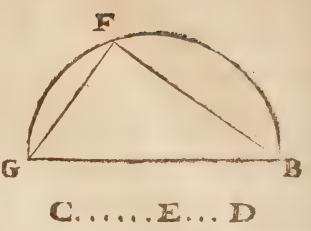
PROP. XXVII. PROB. XIII. 31.

Trouuer deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement, dont la plus grande ſoit incomenſurable de longueur au côté de la diference de leurs quarez.



Ayant diuiſé le nombre quaré CD, en deus nombres qui ne ſoient pas quarez CE, ED, ſoit faite la meſme conſtruction qu'en la precedente, ſauoir come CD, à ED, ainſi le quaré de GB, au quaré de GF, &c. Les lignes GB, GF, ſeront come auparauant prouuées *b* comenſurables de puiſſance ſeulement, ſur ce que *b* 17. 8.

CD, ED, n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré. D'ailleurs GB, estant rationele, GF, le sera aussi. On prouuera encores, que par conuersion de proportion le quaré de GB, est au quaré d'FB, come CD, à CE, lesquels nombres n'ayans pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, les lignes GB, BF, ne *a* seront pas comensurables de longueur.



a 7. p.

Et partant le quaré d'FB, estant la diference des quarez de GB, GF, les lignes GB, GF, sont les lignes requises.

Aplication des nombres.

Les nombres CD, ED, estans 9. & 3. CE, sera 6 : & si GB, est posée 3, GF, sera ℞3. & FB. ℞6.

PROP. XXVIII. PROB. XIV.

32.

Trouuer deus moyenes comensurables de puissance seulement, dont le rectangle soit rationel, & dont la plus grande soit comensurable ou incomensurable de longueur, au côté de la diference de leurs quarez.

Ayant trouué les deus rationeles B, C, mentionées en la 26. proposition, dont la plus grande soit B, & leur moyene proportionele D, aus trois lignes B, D, C, soit trouuée la 4e. proportionele F. Ie dis que D, F, sont les lignes requises.

B, D, C, F.

Premierement, parce que cette construction est semblable à celle de la 24e. prop. l'on prouuera encores en celle-cy, que D, F, sont moyenes, comensurables de puissance seulement, & que leur rectangle est rationel.

De plus, puisque come B, à D, ainsi C, à F, en permutant come B, à C, ainsi D, à F. Or le quaré de B, excede le quaré *b* de C, du quaré d'vne ligne comensurable de longueur à B : donc *c* le quaré de D, excedera le quaré d F, du quaré

b 26. p.
c 13. p.

d'vne ligne comensurable de longueur à D, c'est à dire, que la plus grande ligne est comensurable de longueur au côté de la diference de leurs quarez.

Que si les lignes rationeles B, C, sont trouuées selon la 27e. prop. on prouuera par le mesme argument que le quaré de D, excedera le quaré d'F, du quaré d'vne ligne *a* incomensurable de longueur à F. Et le reste come auparauant.

Aplication des nombres.

Que B, soit 4 : *C,* ℞12 : *D, sera* ℞192 : *F,* ℞108. *desquels derniers les quarez sont come* 4. *à* 3. *leur produit est* ℞20736. *ou* 12 : *& le quaré de* ℞192. *excede celuy de* ℞108. *de* ℞12. *dont le côté* ℞12. *est à* ℞192. *come* 1. *à* 2.

Mais si B, est ℞8, *& C,* 2 : *D, sera* ℞32 : *F,* ℞8 : *le produit de* ℞32. *&* ℞8. *est* 4. *&c.*

PROP. XXIX. PROB. XV. 33.

Trouuer deus moyenes comensurables de puissance seulement, dont le rectangle soit moyen, & dont la plus grande soit comensurable, ou incomensurable de lõgueur au côté de la diference de leurs quarez.

Ayant *a* trouué les deus rationeles D, F, mentionées en la 26e. & la rationele B, qui ne soit comensurable que de puissance à toutes les deus, en sorte que B, soit plus grande que D : soit trouuée C, moyene proportionele entre B, D, & aus trois D, F, C, la 4e. proportionele G. *a An. 17. 8.*

Ie dis que C, G, sont les lignes requises. Premierement parce que cette construction est semblable à celle de la 25e. prop. on prouuera come là mesme, que les lignes C, G, sont moyenes comensurables de puissance seulement, & que leur rectangle est moyen. Et parce que come D, à F, ainsi C, à G, & que le quaré de D, excede le quaré d'F, du quaré d'vne ligne comensurable de longueur à F : le quaré de C, excedera le quaré de

B. C. D. F. G.

G, du quaré d'vne ligne comensurable de longueur à C, c'est à dire que la plus grande C, est comensurable de longueur au côté de la diference des quarez de C, G.

Que si les rationeles D, F, sont trouuées selon la 27e. proposition, on prouuera par le mesme argument que la plus grande C, est incomensurable de longueur au côté de la diference des quarez de C, G.

Anotat.

La pluspart des Comentateurs demontrent les deus derniéres propositions par le moyen de deus Lemmes, qu'ils font marcher deuãt chacune, qui est vne chose superflüe, puisqu'elles sont entierement semblables à la 24. & à la 25e. excepté pour ce qui regarde la diference des quarez des lignes requises, ce qui depend purement des 26. 27. & 13e. propp. de sorte que se seruir icy d'autres demonstrations, n'est qu'alonger la matiere, & embarasser dauantage l'esprit des studieus sans aucune necessité: ce qui est cause que nous auons obmis icy ces deus Lemmes, come nous ferons encores les trois autres qui seruent ordinairement à demontrer les propositions suiuantes, lesquelles aussi bien que celles-cy, se peuuent demontrer sans cela. Clauius s'est bien aperceu de ce que ie dis, pour ce qui est de la 28e. laquelle il demontre sans ce secours, mais en la 29e. & aus suiuantes, il suit le grand chemin des autres, quoy que cela ne soit pas plus necessaire qu'en la 28e. Le Lecteur poura voir ces cinq Lemmes ailleurs, & conferer les autres demonstrations auec celles-cy, pour iuger quelles sont les plus faciles.

Aplication des nombres.

Que B, soit ℞2; *D*, 4: *F*, ℞12: *C, G, seront* ℞32. & ℞18. *dont les quarez sont come* 4. *à* 3: *leur produit est* ℞24. & *le*

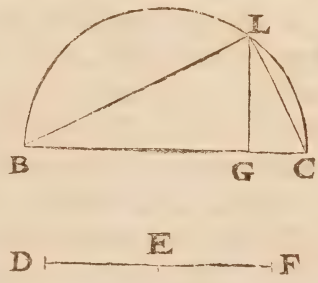
& le quaré de ℞ 32. excede le quaré de ℞ 18. du quaré de ℞ 2, qui est à ℞ 32. come 1. à 2.

Mais si F, est ℞ 6. & le reste de mesme, C, sera ℞ 32 : & G, ℞ $4\frac{1}{2}$, dont les quarez sont come 8. à 3. & la diference des quarez sera ℞ $12\frac{1}{2}$, qui est incomensurable à ℞ 32.

PROP. XXX. PROBL. XVI. 34.

Trouuer deus lignes droites incomensurables de puissance, dont le composé des quarez soit rationel, & le rectangle, moyen.

1. Soient *a* trouuées les deus rationeles B C, D F, comensurables de puissance seulement, dont la plus grande BC, soit incomensurable de longueur au côté de la diference de leurs quarez : & que la ligne BC, soit diuisée au point G, en sorte que le rectangle des segmens BG, GC, soit egal à la 4e. partie du quaré de D F, c'est à dire au *c* quaré de sa moitié D E : puis ayant décrit le demy-cercle BLC, & du point G, tiré la perpendiculaire L G : soient iointes les lignes BL, LC. Ie dis que ces deus lignes B L, LC, sont incomensurables de puissance : que le composé de leurs quarez est rationel, & que leur rectangle est moyen.



a 27.

b Lem. 5

c Scol. 4. 2.

2. Premierement, puisque BC, est incomensurable de longueur au côté de la diference des quarez de B C, DF, & que BC, est diuisée en G, selon le cinq^e^. Lem. les segmens BG, GC, *d* seront incomensurables de longueur.

d 17. p.

3. Et parce que GL, est moyene proportionele entre BG, GC, le quaré de BG, sera au quaré de GL, come B G, à G C : donc puisque BG, GC, sont *e* incomensurables de longueur, les quarez de BG, G L, seront *f* incomensurables, c'est à dire, que les lignes BG, G L, sont comensurables de puissance.

e 2. art.

f An. 8. p.

a 8. 6. & 4. 6. Or *a* come BG, à GL, ainſi BL, à LC; donc BL, LC, ſont
b Cor. 8. p. *b* auſſi incomenſurables de puiſſance.

c 47. 1. 4. De plus, puiſque le *c* quaré de la rationele BC, eſt
d 31. 3. egal aus quarez de BL, LC, l'angle BLC, eſtant droit *d* dans le demy cercle, le compoſé de ces quarez ſera rationel, come eſtant egal au quaré d'vne ligne rationele BC.

5. Et pource que le quaré de DF, par la conſtruction, eſt egal
e 17. 6. au rectangle BGC: & celuy *e* de GL, auſſi (come eſtant moye-
f Cor. 8. 6. ne *f* proportionele entre BG, GC,) les quarez de DE, GL, ſeront egaus, & les lignes DE, GL, egales, & partant GL,
g 4. p. eſtant moitié de DF, luy ſera *g* comenſurable de longueur, puiſqu'elles ſont entre elles come 1. à 2. Or DF, eſt comen-
h An. 10. p. ſurable de puiſſance ſeulement à BC, donc auſſi ſa *h* moitié GL, ſera comenſurable de puiſſance ſeulement, à la meſme ligne BC. Et parce que BC, eſt rationele par la conſtruction, GL, ſera auſſi rationele, & ainſi le rectangle de BC, GL, ſe-
i 18. p. ra *i* moyen.

6. En dernier lieu, parce que les triangles BLC, GLC,
k 8. 6. ſont *k* ſemblables, BC, ſera à BL, come LC, à GL, à
l 4. 6. l'entour *l* des angles egaus B, & CLG. Et partant le *m* re-
m 16. 6. ctangle de BL, LC, ſera egal au rectangle de BC, GL, lequel
n 5. art. dernier ayant eſté *n* prouué eſpace moyen, ſon egal le rectangle de BL, LC, ſera auſſi moyen.

Donc les lignes BL, LC, ſont les lignes requiſes, puiſ-
o 8. art. qu'elles ſont *o* incomenſurables de puiſſance, que leur com-
p 4. art. poſé de leurs quarez *p* eſt rationel, & que leur rectangle
q 6. art. *q* eſt moyen.

Aplication des nombres.

Que BC, ſoit ℞32. *DF*, 4: *EG, ſuiuant la diuiſion du 5. Lem. ſera* ℞8 + 2. *& GC.* ℞8 — 2. *GL, egale à DE,* 2. *Et parce que le quaré de BL, eſt egal aus quarez de BG, GL, ſon quaré ſera* 16 + ℞128: *& le quaré d'LC, eſtant egal à ceus de GL, GC, ſera* 16 — ℞128. *& les lignes BL, LC ſeront* ℞(16 + ℞128) *&* ℞(16 — ℞128.) *dont le compoſé des quarez eſt* 32. *& le rectangle* ℞128

ANOTAT.

Clauius demontre icy vn Teoreme qu'il dit auoir trouué dans vn ancien Comentaire, lequel eſt, ce me ſemble, aſſez hors de propos en cet endroit; car ie ne voy aucune connexion de ces Problemes cy auec ce Teoreme là, c'eſt pourquoy nous l'auons reieté iuſques apres la 58. propoſition, où nous le demontrerons plus comodement.

PROP. XXXI. PROB. XVII. 35.

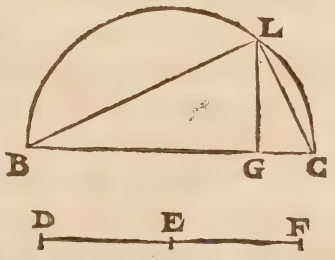
Trouuer deus lignes droites incomenſurables de puiſſance, dont le compoſé des quarez ſoit vn eſpace moyen, & le rectangle, rationel.

Ayant trouué *a* les deus moyenes BC, DF, comenſurables de puiſſance ſeulement, dont le rectangle ſoit rationel, & dont la plus grande BC, ſoit incomenſurable de longueur au côté de la diference de leurs quarez, ſoit conſtruit pour tout le reſte, come en la precedente propoſition. Ie dis que BL, LC, ſont les lignes requiſes. *a* 28. p.

On prouuera come en la derniere propoſition, que BL, LC, ſont incomenſurables de puiſſance.

Et parce que le compoſé de leurs quarez eſt egal au quaré de la moyene BC, ce meſme compoſé eſt auſſi moyen.

On prouuera encores de meſme qu'auparauant, que la ligne GL, eſt moitié de DF: & partant le rectangle de BC, GL, ſera *b* la moitié du rectangle de BC, DF, puiſque ces deus rectangles ayans la meſme hauteur BC, la baſe GL, eſt moitié de la baſe DF. Or le rectangle de BC, DF, eſt rationel par la conſtruction: donc le rectangle de BC, GL, qui luy eſt comenſurable, come étant ſa moitié, ſera auſſi rationel.



b 1. 6.

Et par conſequent le rectangle BL, LC, lequel de meſme qu'en la precedente propoſition eſt egal au rectangle de BC, GL, eſt auſsi rationel.

Aplication des nombres.

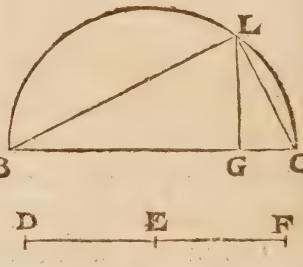
Que BC, ſoit R/128 : *DF,* R/32 : *BG, ſera* R/8 + R/2 : *GC,* R/8 — R/2 : *GL,* R/2. *BL* R (R32+4) *LC,* R (R32 — 4.) *Le composé de leurs quarez eſt* R 128. *& leur rectangle eſt* 4.

PROP. XXXII. PROB. XVIII.

36.

Trouuer deus lignes droites incomenſurables de puiſſance, dont le compoſé des quarez ſoit moyen, & le rectangle auſſi moyen, & incomenſurable au compoſé des meſmes quarez.

a 29. p. 1. Soient trouuées les *a* deus moyenes BC, DF, comenſurables de puiſſance ſeulement, dont le rectangle ſoit moyen, & dont la plus grande BC, ſoit incomenſurable de longueur au côté de la diference de leurs quarez, & ſoit faite encores la meſme conſtruction qu'en la 30e. Ie dis que les lignes BL, LC, ſont les lignes requiſes.



2. Premierement, les lignes BL, LC, ſeront come auparauant prouuées incomenſurables de puiſſance: & le compoſé des quarez, eſpace moyen, la ligne BC, eſtant moyene.

3. Et parce que le rectangle de BC, DF, eſt moyen par la b Cor. 20. p. conſtruction, *b* celuy de BC, GL, qui luy eſt comenſurable de meſme qu'en la derniere propoſition, & par conſequent le rectangle de BL, LC, qui eſt encores, come aus deus precedentes égal à ce dernier de BC, GL, ſera *c* auſſi eſpace moyen.

c Cor. 20. p.

4. En fin, puiſque DF, eſt incomenſurable de longueur à BC : ſa moitié DE, c'eſt à dire GL, luy ſera auſſi incomenſurable *a* de longueur. Or come B C, à GL, *b* ainſi le quaré de BC, au rectangle de BC, GL : donc le quaré de BC, c'eſt à dire le compoſé des quarez de BL, LC, ſera *c* incomenſurable au rectangle de BC, GL, & partant auſſi au rectangle de BL, LC, qui luy *d* eſt egal.

a An. 8. p.
b Lem. 7.
c 8. p.
d 3. art.

Aplication des nombres.

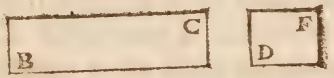
Que BC, ſoit B♯384 : *DF*, B♯96 : *BG, ſera* B♯24 + B♯6. *GC*, B♯24 — B♯6 : *GL* B♯6 : *BL*, B♯ (B♯96 + B♯48) *& LC*, B♯ (B♯96 — B♯48) *dont le composé des quarez eſt* B♯384. *& le produit* B♯48. *qui ſont entre eus come* B♯8. *à* 1.

Anotat.

Tous les derniers Problemes ſeruent de preparation au traité des lignes irrationeles faites par compoſition, & par detraction, qui comence à la propoſition ſuiuante.

Lem. XII.

Tout eſpace comenſurable a vne eſpace irrationel, eſt irrationel.



Que l'eſpace EC, ſoit comenſurable à l'eſpace irrationel DF. Ie dis que BC, eſt irrationel : car ſi BC, eſtoit rationel, ſon comenſurable DF, e ſeroit auſſi rationel, contre l'hipoteſe.

e Lem. 8.

Prop. XXXIII. Teor. XXII.

37.
74.

Si vne ligne droite eſt compoſée de deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement : elle eſt irrationele, & s'apele Bineme ou ligne Binomiale.

Et la diference de deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement, eſt auſſi irrationele, & s'apele Apotome ou Reſidu.

1. Que la ligne droite B D, ſoit compoſée des deus rationeles B C, C D, comenſurables de puiſſance ſeulement. Ie dis que B D, eſt irrationele. Puiſque les lignes B C, C D, ſont rationeles comenſurables de puiſſance, leurs quarez ſont rationaus & comenſurables, & partant le compoſé de ces quarez eſtant *a* comenſurable à chacun d'eus, eſt rationel.

a 14. *p.* *b* 18. *p.*

2. Or le rectangle B C D, eſt *b* irrationel, & partant auſſi ſon *c* double, puiſqu'il luy eſt *d* comenſurable. Donc le double du rectangle B C D, eſt incomenſurable au compoſé des quarez de B C, C D, puiſque l'vn eſt rationel & l'autre irrationel.

c Lem. 12. *d* 5. *p.*

3. Et parce qu'vne grandeur compoſée de deus grandeurs incomenſurables, eſt *e* incomenſurable à chacune d'elles, le compoſé des quarez de B C, C D, ioint au double du rectangle B C D, fera vn eſpace total incomenſurable à chacune de ſes parties, & partant au compoſé des quarez de B C, C D. Donc puiſque le quaré de B D, eſt *f* egal à tous ces eſpaces, il ſera incomenſurable au compoſé des quarez de B C, C D; lequel compoſé ayant eſté prouué *g* rationel, le quaré de B D, ſera irrationel, & partant la ligne B D, irrationele. Cette ſorte d'irrationeles s'apele Binome ou Binomiale pour eſtre compoſée de deus lignes incomenſurables de longueur.

e 15. *p.* *f* 4. 2. *g* 1. *art.*

4. Que la ligne F C, egale à C D, ſoit maintenant retranchée de la ligne B C, pour auoir la ligne B F, diference des deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement B C, C D. Ie dis que cette diference B F, eſt irrationele.

5. Car le compoſé des quarez de B C, C F, *h* eſt egal au double du rectangle B C F, auec le quaré de B F. Or C D, eſt

h 7. 2.

egale à CF, par la conſtruction ; donc le compoſé des quarez de BC, CD, eſt egal au double du rectangle BCD, auec le quaré de BF.

6. Et parce que le compoſé des quarez de BC, CD, eſt *a* incomenſurable au double du rectangle BCD, qui eſt l'vne de ſes parties, il ſera auſſi *b* incomenſurable au quaré de BF, qui eſt ſon autre partie. *a* 2. art. *b* Corol. 15. p.

7. Et partant le quaré de BF, eſtant incomenſurable au compoſé des quarez de BC, CD, qui eſt *c* rationel, ſera irrationel, & la ligne BF, irrationele. Elle eſt apelee Apotome ou Reſidu, pource qu'elle eſt la diference de deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement, ou ce qui reſte de la plus grande, apres en auoir ôté la moindre. *c* 1. art.

Aplication des nombres.

Que la ligne BC, ſoit 6. CD, R 20. *BD ſera* 6 + R 20. *BF,* 6 — R 20. *dont les quarez ſont* 56 + R 2880. *&* 56 — R 2880.

Anotation.

Euclide ayant iuſques icy parlé des grandeurs comenſurables & incomenſurables en general, & des lignes irrationeles ſimples qu'il nome moyenes : comence à traiter des autres ſortes de lignes irrationeles, leſquelles il diuiſe en compoſées, & diminuées. Les compoſées ſont celles qui ſe forment par l'addition ou compoſition des deus lignes. Les diminuées ſe forment par detraction ou retranchement, en ôtant l'vne de l'autre. Il en fait deus traitez ſeparez, diſcourant premierement des lignes compoſées, de leur origine, nature, & propritez, & puis des lignes diminuées, & de tout ce qui les concerne. Mais parce que ces deus ſortes de lignes ont vne grande connexion enſemble, & que les demonſtrations des vnes s'apliquent aiſément aus autres, auec fort peu de diference, nous n'auons pas iugé neceſſaire d'en faire des propo-

ſitions à part, veu qu'il ſeroit inutile de repeter pour les vnes, ce qui auroit eſté demontré pour les autres, come il ſe voit en la demonſtration de ce Teoréme, dont la premiere partie, qui eſt de la Binomiale, ſert auſsi en partie pour l'Apotome, au lieu que les interpretes d'Euclide traitans ſeparément des lignes diminuées, ſont contrains de repeter vne bone partie de ce qu'ils ont dit en la demonſtration du Binome. C'eſt ce qui nous a obligé de ioindre ces deus propoſitions en vne ſeule, pour le ſoulagement des ſtudieus, & pour faire voir que les dificultez de ce liure, ne ſont pas telles qu'on ſe figure, & que ſa longueur ennuyeuſe, qui cauſe tant d'aprehenſion à ceus qui en deſirent la conoiſſance, & ſon obſcurité qui en détourne la pluſpart, ne procedent pas tant de la nature des choſes, que de ceus qui les ont traitées de la ſorte, ſans conſiderer qu'elles ſe pouuoient expliquer bien plus ſuccinctement & auec plus de facilité, y procedant come nous faiſons.

Et ainſi nous continüerons de traiter conioíntement de ces deus ſortes de lignes, dans tout le reſte du liure, ſelon qu'elles ſe répondent les vnes aus autres, ſans nous aréter à l'ancien ordre; & dirons que la premiere ligne, dont il eſt parlé en cette propoſition, eſt apelée Binome ou ligne de deus noms, non pas pour eſtre composée, come diſent la pluſpart des Comentateurs, de deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement, car cela eſt contre le ſens d'Euclide, qui atribüe des noms non ſeulement à toutes les lignes irrationeles faites par compoſition, come il ſe voit en la 37. & en la 38e. propoſition, ou ſelon Clauius en la 43e. & aus cinq ſuiuantes, mais encores à l'Apotome en la 113. & aus deus ſuiuantes. Il faut donc entendre par les noms d'vn irrationele, ou les lignes qui la compoſent ou celles dont elle eſt la diference,

pourueu

pourueu qu'elles soient incomensurables de longueur, soit qu'au reste elles se trouuent comensurables ou incomensurables de puissance, puisque c'est la seule chose qui conuiene generalement aus deus noms de quelque irrationele que ce soit, ou composée, ou diminuée. D'où il s'ensuit, que toute ligne irrationele de l'vne de ces deus sortes, pouroit estre apelée Binomiale, ce qui est tres certain, puisqu'elles ont toutes, deus noms: & neanmoins pour les distinguer, celles-là seulement sont nomées particulierement Binomiales, qui sont composées de deus rationeles comensurables de puissance seulement; & Apotomes, leurs diferences.

PROP. XXXIV. TEOR. XXIII. 38: 75.

Si vne ligne droite est composée de deus Moyenes comensurables de puissance seulement, dont le rectangle soit rationel: cette ligne est irrationele, & s'apele premiere Bimediale. Et la diference de deus Moyenes comensurables de puissance seulement, dont le rectangle soit rationel; est aussi irrationele, & s'apele premier Residu Medial.

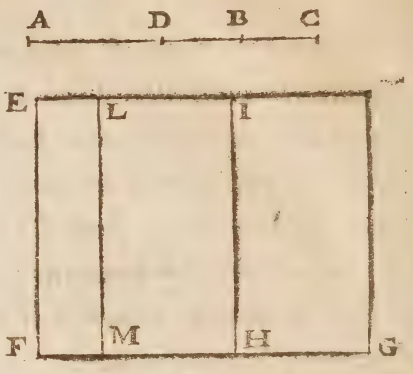
1. Que la ligne AC, soit composée des deus Moyenes AB, BC, qui soient telles qu'il est porté par la proposition. Ie dis que cette ligne AC, est irrationele. Que le quaré d'AC, *a* aplique à la rationele proposée EF, face la largeur FG, & le composé de quarez d'AB, BC, la largeur FH: puis ayant acheué le rectangle EG, soit tirée la ligne IH, paralele à EF; & le rectangle IG, sera *b* egal au double du rectangle ABC. *a* 45. 2. *b* 4. 2.

2. Or, puisque les lignes AB, BC, sont Moyenes comensurables de puissance, leurs quarez sont Moyens & comensurables, & partant leur composé, c'est à dire FH, qui leur est *c* comensurable à tous deus, est espace *d* Moyen. *c* 14. 9. *d Coro.* 20. 9.

3. Et parce que leur rectangle, par l'hipotese est rationel, le double du mesme rectangle sauoir IG, sera aussi *e* ratio- *e Lem.* 1.

nel, & incomensurable à EH, qui a esté prouué Moyen.

a 1. 6. Et partant les lignes FH, HG, qui ont *a* mesme proportion qu'EH, IG, sont incomensurables de longueur par l'Anot. de la 8e. prop.



4. Mais parce que les mesmes lignes FH, HG, sont largeurs d'vne espace

b 2. & 3. art. *b* rationel & d'vn Moyen,

c Cor. 18. & 19. p. elles seront *c* rationeles, & par consequent comensurables de puissance seulement, puisqu'elles sont in-

d 3. art. comensurables *d* de longueur.

e 18. p. 5. Donc FG, est *e* irrationele, & le rectangle EG, *f*

f Coral. 18. p. irrationel, & la ligne AC, dont le quaré est egal à cet espace, est irrationele.

Que la ligne DB, egale à BC, soit maintenant retranchée d'AB, pour auoir AD, diference des Moyenes AB, BC. Ie dis que la ligne AD, est irrationele.

6. Car soit prise en FH, la ligne HM, egale à HG, & tirée la

g 1. 6. paralele ML, & le rectangle MI, sera *g* egal au rectangle IG, c'est à dire au double du rectangle ABC, ou ABD, qui est la mesme chose: & la ligne FM, sera *h* irrationele, puis-

h 33. p. qu'FH, & HG (ou son egale HM) sont rationeles comensurables de puissance seulement, par le 4. art.

i 7. 2. 7. Or le composé des quarez d'AB, BD, est *i* egal au double du rectangle ABD, auec le quaré de leur diference AD: donc puisque le rectangle EH, est egal au composé des

k 6. art. quarez d'AB, BD, & *k* celuy d'LH, ou IG, double du rectangle ABD; le rectangle EM, sera egal au quaré de la diference AD.

l Cor. 18. p. 8. Et partant le rectangle EM, estant *l* irrationel, puisqu'il est compris sous la rationele EF, & l'irrationele FM, son

m 6. art. *m* egal le quaré d'AD, sera irrationel, & AD, irrationele.

Corol. I.

Le quaré de la premiere Bimediale apliqué à la Rationele propoſée, a pour largeur vne ligne Binomiale. Car la ligne FG, a eſté demontrée diuiſée au point K, en deus rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement.

Corol. II.

Le quaré du premier Reſidu Medial apliqué à la Rationele propoſée a pour largeur vne Apotome. Car la ligne FM, qui eſt largeur du quaré d'AD, apliqué à EF; eſt la diference des rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement FH, HM.

Aplication des nombres.

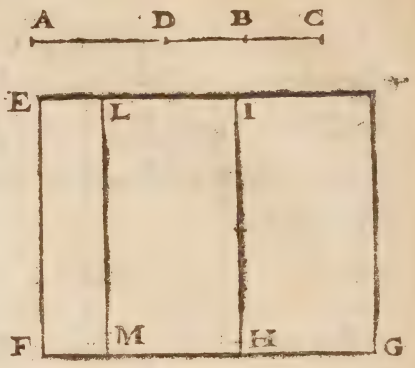
Qu'AB, ſoit R/108. *BC* R/12. *EF*, 2: *AC, ſera* R/108 + R/12: *AD*, R/108 — R/12: *EG*, R192 + 12: *FG*, R48 + 6: *FM*, R48 — 6. *MH, ou HG*, 6: *EM*, R192 — 12: *LH, ou IG*, 12.

Prop. XXXV. Teor. XXIV. 397. 76.

Si vne ligne droite eſt compoſée de deus Moyenes comenſurables de puiſſance ſeulement dont le rectangle ſoit Moyen; elle eſt irrationele, & s'apele ſegonde Bimediale. Et la diference de ces deus Moyenes, eſt auſſi irrationele, & eſt apelée ſegond Reſidu Medial.

1. Que la ligne AC, ſoit compoſée des deus Moyenes AB, BC, comenſurables de puiſſance ſeulement, dont le rectangle ſoit Moyen. Ie dis que la ligne AC, eſt irrationele.

Car ayant fait la meſme aplication & conſtruction qu'en la precedente, on prouuera come auparauant que le rectangle EH, eſt Moyen. Or par l'hipoteſe le rectangle ABC, & partant auſſi ſon double IG, eſt eſpace Moyen ; donc les largeurs
a 19. p. FH, HG, ſont *a* ratione-les.



2. Et parce que come
b 7. Lem. AB, à BC, ainſi *b* le quaré d'AB, au rectangle ABC, & qu'AB, BC, ſont incomenſurables de longueur, le quaré d'AB, ſera
c Anot. 8. p. *c* incomenſurable au rectangle ABC.

3. Or le compoſé des quarez d'AB, BC, c'eſt à dire le rectangle EH, de meſme qu'en la precedente, eſt comenſurable au quaré d'AB: & le double du rectangle ABC, c'eſt à dire IG,
d 5. p. eſt *d* comenſurable au ſimple rectangle ABC. Donc EH, IG, eſtans comenſurables aus incomenſurables, le quaré d'AB, &
e Anot. 12. p. le rectangle ABC, ſont *e* incomenſurables entre eus.

4. Et partant les lignes FH, HG, qui ſont en meſme proportion qu'EH, IG, ſont *f* incomenſurables de longueur. Et
f Anot. 8. p. parce qu'elles ont eſté *g* prouuées rationeles, elles ſont ra-
g 1. Art. tioneles comenſurables de puiſſance ſeulement. Et ainſi leur
h 33. p. compoſée FG, eſt *h* irrationele, & par conſequent l'eſpace
i 1. Cor. 18. p. EG, c'eſt à dire le quaré d'AC, *i* irrationel, & AC, irrationele.

Que ſi on prend DB, egale à BC, on prouuera come en la precedente qu'AD, eſt irrationele. Car en prenant MH,
k 13. p. egale à HG; FM, ſera encore *k* irrationele, & l'eſpace EM, irrationel, & par conſequent AD, dont le quaré ſera encores egal à EM, ſera irrationele.

Corol. I.

Le quaré de la ſegonde Bimediale apliqué à la

rationele proposée, a pour largeur vne Binomiale, puisque FH, HG, qui composent cette largeur, sont rationeles a comensurables de puissance seulement. a 11. p.

Corol. II.

Le quaré du segond Residu Medial apliqué à la Rationele proposée a pour largeur vne Apotome sauoir icy FM, diference d'FH, HG.

Aplication des nombres.

Qu'AB, soit R/18. *BC,* R/2. *EF,* 2: *la toute AC, sera* R/18 + R/2: *& AD,* R/18 — R/2.

Anotation.

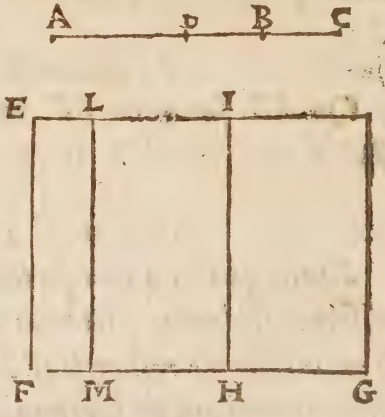
Pource qu'il y a deus sortes de Moyenes comensurables de puissance seulement, les vnes dont le rectangle est rationel, les autres dont le rectangle est Moyen; les deus dernieres propositions traitent de l'origine des lignes irrationeles que produisent ces deus especes de moyenes, tant par composition que par detraction. Et parce que le rationel precede de conoissance l'irrationel, il est premierement fait mention des irrationeles qui sont formées de la premiere espece: desqueles celle qui se produit par composition, s'apele premiere Bimediale, & celle qui y répond par detraction, premier Residu Medial. Mais celles qui tirent leur origine de la segonde especel, sont apelées, segonde Bimediale, & segond Residu Medial, le tout à cause des Moyenes ou Mediales qui les composent, ou dont elles sont retranchées.

Prop. XXXVI. Teor. XXV. 40. 77.

Si vne ligne droite est composée de deus lignes

droites incomenſurables de puiſſance, dont le compoſé des quarez ſoit rationel, & le rectangle Moyen; cette compoſée eſt irrationele, & eſt apelée Majeure. Et la diference des meſmes lignes eſt irrationele apelée Mineure.

1. Que la ligne AC, ſoit compoſée de deus lignes AB, BC, incomenſurables de puiſſance, dont le rectangle, &c. Ie dis que la ligne AC, eſt irrationele.



2. Ayant conſtruit, come en la 34^e. le rectangle EH, eſtant rationel par l'hipoteſe, & le rectangle IG, qui eſt double de l'eſpace Moyen ABC, eſtant *a* Moyen; les eſpaces EH, IG ſeront incomenſurables: & parceque les largeurs FH, HG, qui ſont *b* Rationeles, ont meſme *c* proportion que les rectangles EH, IG, elles ſeront *d* incomenſurables de longueur, & partant comenſurables de puiſſance ſeulement.

a Cor. 20. *p.*

b Cor. 18. *p.* & 19. *p.*

c 1. 6.

d An. 8. *p.*

3. Donc FG, eſt *e* irrationele, l'eſpace *f* EG, irrationel, & la ligne AC, dont le quaré eſt eſgal a EG, eſt irrationele.

e 33. *p.*

f Corol. 18. *p.*

4. Que ſi on retranche BD, egale à BC; & MH, egale à HG; on prouuera come aus precedentes propoſitions, qu'AD diference d'AB, BC, eſt irrationele.

5. Or la ligne AC, eſt apelée Majeure, de ce que le compoſé des quarés de ſes parties, lequel eſt plus grand que le double de leur rectangle, (come nous auons montré au 5. art. de la 33. prop.) eſt Rationel: & ainſi eſt denomée Majeure, de ce que la plus grande des parties de ſon quaré, eſt eſpace Rationel.

6. Et la ligne AD, qui luy répond par diminution, s'apele Mineure, come eſtant opoſée à la Majeure AC.

Corol. I.

Le quaré de la Majeure apliqué à la Rationele propoſée, a pour largeur vne Binomiale, telle qu'eſt icy FG, come aus preced. propp.

Corol. II.

Et le quaré de la Mineure, a pour largeur vne Apotome, puiſqu'FM, eſt diference d'FH, HG.

Aplication des nombres.

Qué AB, ſoit $\sqrt{}(6+\sqrt{}12) : BC$, $\sqrt{}(6-\sqrt{}12)\ AC$, *ſera* $\sqrt{}(6+\sqrt{}12)+\sqrt{}(6-\sqrt{}12).\ AD$, $\sqrt{}(6+\sqrt{}12)-\sqrt{}(6-\sqrt{}12)$.

Prop. XXXVII. Theor. XXVI. 413 78.

Si vne ligne droite eſt compoſée des deus lignes droites incomenſurables de puiſſance, dont le compoſé des quarés ſoit Moyen, & le rectangle Rationel; cette ligne eſt irrationele, & s'apele Rationele-Moyene. Et la diference de ces meſmes lignes eſt auſſi irrationele, & s'apele Reſidu de Rationele-Moyene.

1. Que la ligne AC, ſoit compoſee des lignes AB, BC, incomenſurables de puiſſance, dont le compoſé des quarés &c. Ie dis que la ligne AC eſt irrationele.

2. Ayant conſtruit come auparauant, on prouuera come en la 34e. que les rectangles EH, IG ſont incomenſurables, (puiſque le compoſé des quarés eſt Moyen, & le rectangle Rationel de meſme qu'en cette propoſition là) que les lignes FH, HG, ſont Rationeles comenſurables de puiſ-

sance seulement, que le rectangle EG, est irrationel, & partant la ligne AC, irrationele.

3. En fin ayant retranché BD, egale à BC, on prouuera encores qu'AD, qui est la diference d'AB, BC, est irrationele sur ce que l'espace EM, egal à son quaré, est irrationel, come estant contenu sous la Rationele EF, & l'irrationele FM.

COROL. I.

Le quaré de la Rationele-Moyene, apliqué à la Rationele proposée, a pour largeur, vne Binomiale.

COROL. II.

Le quaré du Residu de Rationele-Moyene apliqué à la Rationele proposée, a pour largeur vne Apotome.

Ces deus Corolaires sont faciles à prouuer par le moyen des precedens.

Aplication des nombres.

Qu'AB, soit ℞ (℞ 32 + 4) : *BC,* ℞ (℞ 32 — 4) *AC, sera* ℞ (℞ 32 + 4) + ℞ (℞ 32 — 4), *AD,* ℞ (℞ 32 + 4) — ℞ (℞ 32 — 4).

ANOTATION.

Cette ligne est apelée Rationele-Moyene, de ce que le composé des quarés de ses noms, est Moyen, & le double de leur rectangle, Rationel, & que ces deus espaces composent son quaré, faisant marcher deuant, le mot de Rationel come precedent l'irationel de conoissance, quoy que celuy de Moyen semblât deuoir preceder, l'espace Moyen estant icy la plus grande partie de son quaré.

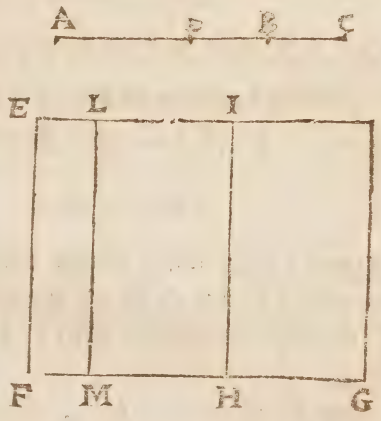
Et le

Et le Resídu qui luy répond, est apelé Resídu de Rationele-Moyene, non pas pour estre tiré d'vne Rationele-Moyene, mais seulement pour témeigner qu'il est formé par detraction, des mesmes lignes dont la Rationele-Moyene est formee par composition.

Prop. XXXVIII. Teor. XXVII. 421. 79.

Si vne ligne droite est composée de deus lignes droites incomensurables de puissance, dont le composé des quarés soit Moyen, & le rectangle aussi Moyen, & incomensurable au composé de leurs quarés : cette ligne est irrationele, & s'apele Double-moyene. Et la diference de ces deus lignes, est aussi irrationele, & s'apele Resídu de Double-Moyene.

Que les lignes AB, BC, soient incomensurables de puissance, & facent le composé de leurs quarés, & leur rectangle, espaces Moyens, & incomensurables.



Ie dis que la ligne AC, qui est composée, de ces deus lignes, est irrationele.

Ayant fait encores la mesme construction qu'aus dernieres propositions, les lignes FH, HG, seront encores demontrées Rationeles comensurables de puissance seulement (sur ce que EH, IG, sont incomensurables par l'hipotese,) de mesme qu'en la 35. prop. & partant FG, sera irrationele; EG, irrationel; & la ligne AC qui fait vn quaré egal à EG, sera irrationele de mesme qu'aus preced. propp.

Ayant encores retranché AD, egale à BC, pour auoir AD, diference d'AB, BC, on prouuera encores de mesme qu'auparauant, que son quaré est egal au rectangle irrationel EM, & que partant AD, est irrationele.

COROL. I.

Le quaré de la Double-moyene, apliqué à la Rationele proposée, a pour largeur vne Binomiale.

COROL. II.

Et le quaré du Residu de Double-moyene, a pour largeur vne Apotome.

Ces deus Corolaires se prouuent come les precedens.

ANOTATION.

On peut bien conoitre par le moyen des precedentes Anotations la raison de l'imposition des noms de Double-Moyenes & de Residu de Double-Moyene.

Aplication des nombres.

Qu'AB, soit ℞(℞96 + ℞48) : *BC*, ℞(℞96 — ℞48) : *AC, sera* ℞(℞96 + ℞48.) + ℞(℞96 — ℞48) *&* *AD*, ℞(℞96 + ℞48) — ℞(℞96 — ℞48.)

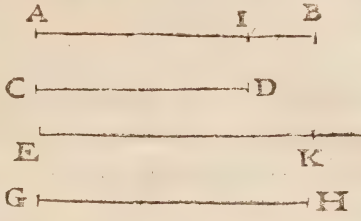
LEMME XIII.

Quatre grandeurs estant proposées, s'il y a mesme diference entre la 1re. & la 2e. qu'entre la 3e. & la 4e. : il y aura aussi mesme diference entre la 1e. & la 3e. qu'entre la 2e. & la 4e.

Que la grandeur IB, diference d'AB, CD, soit egale a KF, diference d'EF, GH. Ie dis qu'en permutant, il y a mesme diference entre AB, EF, qu'entre CD, GH.

Puisque IB, est la diference d'AB, CD; AI, sera ega-

le à CD, & par meſme raiſon EK, à GH, & partant il y aura meſme diference entre AI, EK, qu'entre CD, GH.



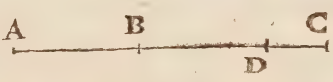
a 15. ax. lib. 1.

Or il y a meſme diference entre AB, EF, qu'entre AI, EK, puiſqu'IB, KF, ſont egales, donc il y aura meſme diference entre AB, EF, qu'entre CD, GH.

PROP. XXXIX. TEOR. XXVIII.

L'Apotome n'a qu'vne ſeule ligne Rationele, qui luy conuiene, & qui ſoit comenſurable de puiſſance ſeulement à la toute.

1. Que la Rationele BC, ſoit la conuenante de l'Apotome AB, en ſorte qu'AC, BC, ſoient Rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement. Ie dis qu'il n'y a point d'autre ligne Rationele, qui conuiene de la meſme ſorte à l'Apotome AB.



2. Car autrement que la ligne BD, ſoit encores ſa conuenante ſi faire ſe peut, en ſorte qu'AD, BD, ſoient auſſi Rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement.

3. Parce qu'il y a meſme diference entre le compoſé des quarés d'AC, CB, & le rectangle ACB, pris deus fois qu'entre le compoſé des quarés, d'AD, DB, & le rectangle ADB, pris deus fois, ſauoir le *b* quaré d'AB, il y aura auſſi en *c* permutant meſme diference entre le compoſé des quarés d'AC, CB, & le compoſé des quarés d'AD, DB, qu'entre le rectangle ACB, pris deus fois, & le rectangle ADB, pris deus fois.

b Scol. 7. 2. *c* Lem. 3.

4. Or la diference d'entre les deus compoſez des quarés, eſt *d* Rationele, puiſque chaque quaré, & partant auſſi

d Ant. 23. 5.

leur composé, est Rationel : donc aussi la diference d'entre les doubles de chaque rectangle, est Rationele.

5. D'ailleurs, puisque les
a 18.p. rectangles A C B, A D B, sont espaces Moyens *a*, & partant aussi les mesmes rectangles pris deus fois, la diference d'entre le rectangle A C B, pris deus fois, & le rectangle
b 23.p. A D B, pris deus fois, ne sera pas Rationele. *b* Ce qui est
c 4.art. impossible, puisqu'elle a esté prouuée *c* Rationele.

6. Donc la ligne BD, ny quelqu'autre que ce puisse estre, ne sera pas la conuenante de l'Apotome AB.

Aplication des nombres.

La verité de ce Teoreme se reconeſt bien plus facilement en nombres, qu'en lignes, parce qu'on ne peut adiouter, ny soustraire les nombres incomensurables les vns aus autres, que par les signes de plus & de moins; ce qui ne se fait pas en lignes, lesqueles s'adioutent & soustrayent come on veut. Or le sens de cette proposition en nombres, est que l'on ne peut adiouter à vn nombre diminué aucun nombre que celuy qui en a esté ôté, lequel y estant adiouté, soit comensurable de puissance seulement au total. Par exemple ayant pris le nombre diminué 4 — R6. *il est certain que l'on ne luy peut adiouter aucun autre nombre que* R6. *lequel en a esté tiré, qui ayt les mesmes proprietez, comme il est aisé à prouuer, car tout autre nombre que* R6. *adiouté à* 4 — R6. *ne sera point* 4.

81: PROP. XL. TEOR. XXIX.

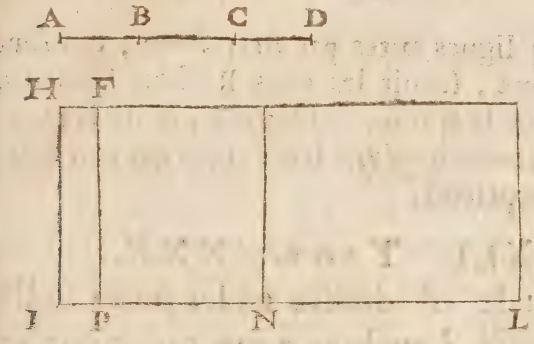
82:

83: Le premier Residu Medial, & les quatre autres

84: lignes irrationeles faites par detraction, n'ont cha-

85. cune qu'vne seule ligne qui leur conuiene selon leurs proprietez.

1. Que la ligne AB, soit premier Residu Medial, dont la conuenante soit BC. Ie dis qu'il n'y a point d'autre ligne, qui conuiene à la ligne AB, en sorte que la toute, & l'adioutée soient Moyenes comensurables de puissance seulement, & que leur rectangle soit Rationel.



2. Car autrement que la ligne BD, soit aussi la conuenãte d'AB, s'il est possible. Soit apliqué à la Rationele proposée HI, le rectangle HN, egal au cõposé des quarez d'AC, CB; le rectangle HL, egal au composé des quarez d'AD, DB, & le rectangle HP, egal au quaré d'AB. Et la ligne IP, sera *a* Apotome. *a* 2. Cor 34. p.

3. Et parce que le composé des quarés d'AC, CB, c'est à dire l'espace HN, est egal *b* au double du rectangle ACB, & au quaré de la diference AB, l'espace HP, estant egal au quaré d'AB, par la constructiõ: FN, sera egal au double du rectangle ACB, lequel estant Rationel, & le composé des quarés Moyen (ce qui se prouuera de mesme qu'en la 34. prop.) les rectangles HN, FN, seront incomensurables. *b* Scol. 7. 2.

4. Or les lignes IN, PN, sont en mesme proportiõ; donc elles sont incomesurables *c* de longueur. Et parcequ'elles sont Rationeles *d* estant largeurs d'vn Moyen & d'vn Rationel, elles sont Rationeles comensurables de puissance seulement. Et partant PN, est la conuenante d'IP, qui a esté *e* prouuée Apotome. *c* An. 8. p. *d* Cor. 18. 1. & 19. p. *e* 2. art.

5. Par la mesme raison PL, sera encores prouuée estre la conuenante d'IP, & ainsi l'Apotome IP, aura deus conuenantes PN, PL, ce qui est *f* absurde. *f* 39. p.

6. On prouuera de la mesme sorte que les quatre autres irrationeles faites par detraction, n'ont qu'vne seule ligne chacune, qui leur conuiene selon leurs proprietez, pource

que par l'aplication de leurs quarez à la Rationele propoſée, il ſe produira des *a* Apotomes pour largeurs, leſqueles ſeront touſiours prouuées auoir deus conuenantes, ſi l'on ſupoſe come en cette demonſtration, que la ligne irrationele dont il ſera queſtion, en ayt auſſi deus : ce qui eſt impoſſible.

a 2. Coroll. 34: 35: 36. 37: 38. p.

7. Donc les cinq lignes faites par detraction, qui ſont en ſuite de l'Apotome, ſauoir les deus Reſidus Mediaus, ceus de la Maieure, de la Rationele-Moyene, & de la Double-moyene, n'ont chacune qu'vne ſeule ligne qui leur conuiene ſelon leurs proprietez.

Prop. XLI. Teor. XXX.

43. Si vne Binomiale eſt diuiſée en ſes noms : elle ne peut eſtre diuiſée à quelque autre point que ce ſoit, en d'autres noms diferens des premiers.

1. Que le Binome BD, ſoit diuiſé en ſes noms au point C. Ie dis qu'il ne peut eſtre diuiſé en d'autres noms diferens des premiers BC, CD.

2. Car autrement, que BD, ſoit encores diuiſé s'il eſt poſſible en d'autres noms au point F, en ſorte que BF, FD, ſoient auſſi Rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement.

3. Or puiſque EC, BF, ſont toutes deus Rationeles, elles ſeront comenſurables de longueur ou de puiſſance. Si BC, eſt comenſurable de longueur à BF, elle ſera auſſi comenſurable *b* de longueur à FC : & parce que BC, eſt comenſurable de puiſſance ſeulement à CD ; FC, ſera auſſi comenſurable *c* de puiſſance ſeulement à CD, & partant FD, ſera *d* irrationele, & ainſi ne poura pas eſtre l'vn des noms du Binome BD. Donc la ligne BF, ne peut eſtre comenſurable de longueur à BC.

b Coroll. 14. p.

c An. 10. p.

d 33. p.

4. Et partant BC, BF ſeront comenſurables de puiſſance ſeulement, & la ligne FC, Apotome dont la conuenante ſera BF.

e 33. p.

5. De plus puiſque FD, CD, ſont Rationeles, elles ſeront comenſurables de longueur, ou de puiſſance. Or FD, ne peut eſtre comenſurable de longueur à CD, car elle ſeroit auſſi *a* comenſurable de longueur à FC, laquelle FC, ſeroit par conſequent Rationele, ce qui eſt abſurde, puiſqu'elle a eſté prouuée *b* Apotome. *a Corol. 14. p.* *b 4. art.*

6. Reſte donc qu'FD, CD, ſoient comenſurables de puiſſance ſeulement; & partant FC, ſera encores Apotome *c*, & aura pour conuenante CD. Et parce que BF, a eſté prouuee *d* auſſi ſa conuenante, l'Apotome FC, aura deus conuenantes; ce qui eſt *e* impoſſible. *c 13. p.* *d 4. art.* *e 39. p.*

7. Et partant BF, FD, ne ſeront pas les noms du Binome BD. Le meſme ſe prouuera de toute autre diuiſion, quelque part que le point F, puiſſe tomber. Donc la ligne Binomiale, eſtant diuiſée en ſes noms, ne pourra eſtre diuiſée en d'autres noms, en quelque point que ce puiſſe eſtre.

Aplication des nombres.

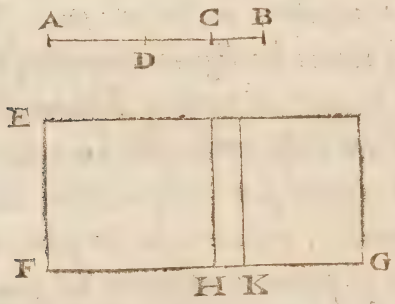
Ce que nous auons dit des nombres en la 39. prop. ſe doit adapter à celle-cy, & à toutes les lignes compoſees, à cauſe du ſigne de plus, qui ſe trouue au nombre Binomial, de meſme que celuy de moins en l'Apotome, & en toutes les lignes diminuées, leſquels ſignes ſont inſeparables des nombres compoſez & diminués, pource que les parties en eſtant incomenſurables, ne ſe peuuent adiouter ny ſouſtraire d'vne autre ſorte, de façon que voulant ôter d'vn des noms de quelque Binome pour adiouter à l'autre, il ſe produira, quoy qu'improprement, vn Trinome ou vn Quadrinome: par exemple eſtant propoſé le Binome 6+ R27. ſi de 6. qui eſt le plus grand nom, l'on ſouſtrait 2. pour l'adiouter à R27. on aura 4+ R27 +2. qui eſt encores le meſme que 6+ R27, parce que le Trinome doit eſtre compoſé de nombres incomenſurables, tels que ne ſont

pas 4. & 2. Que si de 6. on ôte ℞10. pour l'adjouter à ℞27, il se fera le Quadrinome impropre 6 — ℞10 + ℞27 + ℞10. qui n'est tousiours que 6 + ℞27. puisque — ℞10. & + ℞10. se détruisent l'vn l'autre. Et ainsi des autres diuisions de Binome, qui se trouueront tousiours les mesmes que la premiere.

PROP. XLII. TEOR. XXXI.

44: 45: 46: 47: 48. Si vne Premiere Bimediale ou quelqu'vne des autres irrationeles de composition, est diuisée en ses noms : elle ne poura estre diuisée en d'autres noms, à quelque point que ce soit.

Que la 1e. Bimediale AB, soit diuisée en ses noms au point C, en sorte que les lignes AC, CB, soient Moyenes comensurables de puissance seulement, & que leur rectangle soit Rationel. Ie dis que la ligne AB, ne peut estre diuisée à quelque autre point que ce soit, en deus autres lignes Moyenes, qui ayent les mesmes proprietez.



Car autrement que la ligne AB, soit encores diuisée en d'autres noms au point D, s'il est possible. Ayant apliqué à la Rationele proposée EF, le quaré d'AB, faisant la largeur FG; le composé des quarés d'AC, CB, la largeur FK, & le composé des quarés d'AD, DB, la largeur FH, la ligne FG, sera *a* Binomiale, & on prouuera come en la 34e. prop. qu'elle est diuisée en ses noms au point K; & aussi au point H, puisqu'AD, DB, sont suposées Moyenes de mesme nature que les 1es. AC, CB, & partant AB, sera diuisée deus fois en ses noms, ce qui est *b* impossible.

a 1. Cor. 34. p.

b 41. p.

Donc

Donc les lignes AD, DB, ne sont pas les noms de la 1e. Bimediale AB.

Le mesme se prouuera des autres lignes irrationeles faites par composition cy dessus mentionées, parce que l'aplication de leurs quarez à la Rationele, produira *a* des largeurs Binomiales, qui seront toujours demontrées estre diuisées en leurs noms, en deus diuers poins, ayant supposé le contraire de cette proposition. *a* 1. Cor. 4 : 35 : 36 : 37. 38. prop.

Anotat.

Nous auons esté contrains de changer les termes des deus dernieres propositions, qui en sont sis chés Euclide, parce qu'à le bien prendre elles sont fausses, selon qu'elles sont conceües ordinairement, & ne signifient point du tout, ce que l'on veut qu'elles expriment; par exemple la 43. prop. selon Clauius, porte que le Binome ne peut estre diuisé en ses noms qu'à vn seul point. Ce qui est faus absolument, & ne se peut soutenir. Car si on propose le Binome CB, diuisé en ses noms au point D, & que l'on prene CE, egale à DB; CE, EB, seront encores les noms de CB, tous deus egaus, le plus grand au plus grand, & le moindre au moindre, & ainsi CB, est diuisée en ses noms aus deus poins E, D. Le mesme se dira des cinq autres irrationeles de composition, & partant il n'est pas vray de dire qu'aucune de ces lignes ne peut estre diuisée qu'à vn seul point, en ses noms. D'aleguer qu'on veut dire par là, qu'elles ne peuuent estre diuisée deus fois en des noms diferens, le plus grand du plus grand, & le moindre du moindre, c'est vne chose que chacun sait, mais come les paroles ne signifient rien moins que cela, il a esté necessaire de les

C E D B

changer, pour deſigner netement le ſens de ces propoſitions, & ne point cauſer d'erreur.

SEGONDES DEFINITIONS.

LA Rationele eſtant propoſée, & le Binome diuiſé en ſes noms, ſi le plus grand nom eſt comenſurable de longueur au côté de la diference des quarez.

1. *Et que le plus grand nom ſoit auſſi comenſurable de longueur à la Rationele propoſée; la Binomiale eſt apelée premier Binome.*

Et la diference de ſes deus noms, eſt premiere Apotome.

2. *Si le moindre nom eſt comenſurable de longueur à la propoſée, ce ſera le ſegond Binome.*

Et la diference de ſes noms, eſt la ſegonde Apotome.

3. *Si tous les deus noms ſont incomenſurables de longueur à la Rationele propoſée, ce ſera le troiſiéme Binome.*

Et la diference de ſes noms, s'apelera troiſiéme Apotome.

Mais ſi le plus grand nom eſt incomenſurable de longueur au coté de la diference des quarez.

4. *Et que le plus grand nom ſoit comenſurable de longueur à la propoſée, ce ſera le quatriéme Binome.*

Et la diference de ſes noms, la quatriéme Apotome.

5. *Si le moindre nom eſt comenſurable de longueur à la propoſée; la Binomiale ſera apelée cinquiéme Binome.*

Et la diference de ſes noms, cinquiéme Apotome.

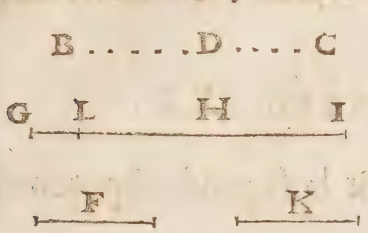
6. *Si tous les deus noms ſont incomenſurables de longueur à la propoſée, ce ſera le ſiziéme Binome.*

Et la diference de ſes noms, ſiziéme Apotome.

PROP. XLIII. PROBL. XIX.

Trouuer le premier Binome, & la premiere Apotome. 49. 87.

1. Ayant trouué * les deus nombres quarez BC, CD, dont la diference BD, ne soit pas quarée, que la ligne GH, soit prise comensurable de longueur à la Rationele proposée F, & soit fait come BC, à BD, ainsi le quaré de GH, au quaré d'HI. Ie dis que les lignes GH, HI, estans iointes ensemble, GI, est premier Binome. * Cor. 17. Lem.



2. Premierement les quarez de GH, HI, estant par la construction come nombre à nombre, mais non pas come nombre quaré à nombre quaré, GH, HI, ne seront *a* comensurables que de puissance; & partant GH, estant comensurable de longueur à la proposée F; HI, ne luy sera *b* comensurable que de puissance. *a* 7. p. & 5. p. *b* An. 8. p.

3. Donc GH, HI estant comensurables à la Rationele F, sont Rationeles, & n'estant *c* comensurables que de puissance, GI, est *d* Binomiale. *c* 2. art. *d* 33. p.

4. Et parce que come BC, à BD, *e* ainsi le quaré de GH, au quaré d'HI: le quaré de GH, sera le plus grand: que leur diference soit le quaré de K. *e* Lem. 7.

5. Donc par conuersion de proportion, come BC, à CD, ainsi le quaré de GH, au quaré de K, puisque CD, est la diference de BC, BD, come le quaré de K, est la diference des quarez de GH, HI.

6. Et partant puisque BC, CD, sont nombres quarez, les lignes GH, & K sont *f* comensurables de longueur. *f* 7 p.

7. Donc puisque le plus grand nom GH, est comensurable de longueur à la proposée, & à K, côté de la diference de squarez; GI, est *g* premiere Binomiale. *g* 2. def.

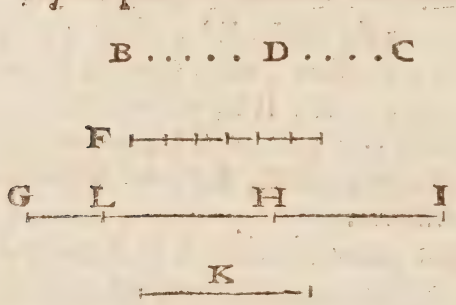
8. Et si on retranche du plus grand nom GH, la ligne HL, egale au moindre HI, le reste GL, sera 1e. Apotome par la definition.

Aplication des nombres.

Suiuant cette construction, les nombres BC, CD, estant 9. & 4. GH, sera 3. HI, B5. K, 2 : GI, 3+B5 : GL, 3—B5.

50 : 88. PROP. XLIV. PROBL. XX.

Trouuer le segond Binome & la segonde Apotome.



Ayant pris les mesmes nombres de la preced. prop. BC, CD, & la ligne HI, comensurable de longueur à la proposée F, soit fait come BD, à BC, ainsi le quaré d'HI, au quaré de GH. Ie dis que la toute GI, est segond Binome.

Premierement on prouuera de mesme qu'en la precedente, que GI, est Binomiale.

Et parce que comme BD, à BC, ainsi le quaré d'HI, au quaré de GH; le quaré de GH, sera plus grand que celuy de HI; que la diference soit le quaré de K.

Or par inuersion, come BC, à BD, ainsi le quaré de GH, à celuy d'HI, & par conuersion come BC, à DC, ainsi le quaré de GH, au quaré de K, & partant les lignes GH, & K, dont les quarez ont mesme proportion que les nombres quarez BC, DC; sont *a* comensurables de longueur. *a* 7. p.

Donc puisque le moindre nom HI, est comensurable de longueur à la proposée F; GI, est 2e. Binome.

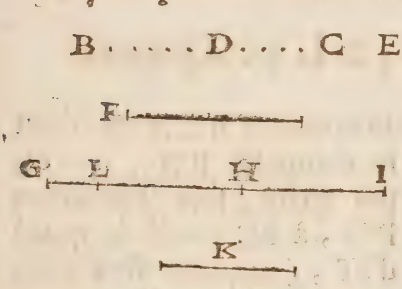
Et si on prend HL, egale au moindre nom HI, en la retranchant du plus grand nom GH, le reste sera 2e. Apotome par la defin. sauoir GL.

Aplication des nombres.

Si HI, eſt poſée 5. GH, ſera R45 : *GI, ſera* R45 +5. *& GL,* R45 —5.

PROP. XLV. PROB. XXI. 51 : 89.

Trouuer le 3e. Binome & la 3e. Apotome.



1. Ayant pris les meſmes nombres B C, C D, & le troiſiéme E, qui ne ſoit pas quaré ſoit fait come E, à B C. ainſi le quaré de la propoſée F, au quaré de GH, & la ligne G H, ſera Rationele, *a* comenſurable de puiſſance ſeulement à F. *a* 47. & 5. pp.

2. Soit fait come B C, à BD, ainſi le quaré de G H, à celuy de H I, & GH, HI, ſeront *b* comenſurables de puiſſance, puiſqu'elles auront leurs quarez come B C, à B D: mais non pas de *c* longueur, puiſque BC, B D, n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré. Ie dis que G H, HI, iointes enſemble, compoſent vne 3e. Binomiale. *b* 5. p. *c* 7. p.

3. Premierement GH, eſt *d* comenſurable de puiſſance ſeulement à la propoſée F. Et parce que come E, à B C, ainſi le quaré d'F, au quaré de GH; & come B C, à B D, ainſi le quaré de G H, au quaré d'H I; par egalité come E, à B D, ainſi le quaré d'F, au quaré d'HI, & partant HI, ſera comenſurable de puiſſance ſeulement à la propoſée F, puiſqu'E, & BD, n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré. *d* 1. art.

4. On prouûera come auparauant que GH, eſt comenſurable de longueur à la ligne K, coté de la diference des quarez.

5. Donc GH, HI, eſtant Rationeles *e* comenſurables de puiſſance ſeulement, & entre elles & à la *f* propoſée, & *e* 2. art. *f* 3. art.

GH, eſtant comenſurable de longueur à la ligne K, coté de la diference des quarez, GI, ſera 3e. Binome.

Et la diference de GH, HI, ſauoir GL, ſera troiſiéme Apotome.

Aplication des nombres.

Suiuant cette conſtruction GH, ſera B54. *HI*, B30. *GI*, B54+B30, *GL*, B54—B30.

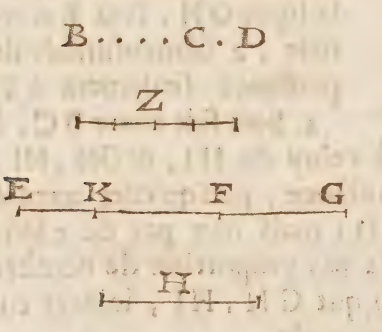
52.
90.

PROP. XLVI. PROB. XXII.

Trouuer le 4e. Binome, & la 4e. Apotome.

2e Lem. 12.

Ayant trouué *a* les deus nombres quarez BC, CD, dont le compoſé BD, ne ſoit pas quaré, ſoit fait come BD, à BC, ainſi le quaré d'EF, (laquelle ſera priſe comenſurable de longueur à la propoſée Z,) au quaré d'FG. La totale EG, ſera prouuée Binomiale come en la 43. p.



Et parce qu'on prouuera encores come auparauant, que le quaré d'EF, eſt à la diference des quarez d'EF, FG, (laquele ſoit le quaré d'H,) come BD, à CD, leſquels n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, les lignes EF, & H, ne ſeront pas *b* comenſurables de longueur.

b 7. p.

Donc puiſque le plus grand nom EF, eſt comenſurable de longueur à la propoſée Z; EG, eſt quatriéme Binome.

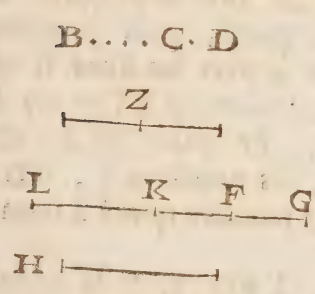
Et la diference d'EF, FG, qui eſt EK, ſera quatriéme Apotome.

Aplication des nombres.

EF, *ſera* 5; *FG*, ℞20; *EG*, 5+℞20; *EK*, 5—℞20. *H*, ℞5.

Prop. XLVII. Prob. XXIII.

Trouuer le 5e. Binome & la 5e. Apotome.



Ayant pris les meſmes nombres de la derniere prop. B C, CD, & la ligne FG, comenſurable de longueur à la propoſée Z; ſoit fait come CD, à BD, ainſi le quaré de FG, au quaré d'LF. Ie dis que la toute LG, eſt 5e. Binomiale. Premierement elle ſera prouuée Binomiale come en la 43e. prop. Et parce que come CD, à BD, ainſi le quaré de FG, au quaré d'LF, par inuerſion le quaré d'LF, ſera au quaré d'FG, come BD, à CD, & partant le quaré d'LF, eſtant plus grand que celuy d'FG, que la diference de ces quarez ſoit le quaré d'H.

Or par conuerſion come BD, à BC, ainſi le quaré d'LF, au quaré d'H. Donc les nombres BD, BC, n'ayant pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, les lignes LF, & H, ſeront *a* incomenſurables de longueur. Et parce *a* 47. P. que le moindre nom FG, eſt comenſurable de longueur à la propoſée Z; LG, ſera 5e. Binome.

Et partant LK, diference d'LF, FG, eſt 5e. Apotome.

Aplication des nombres.

FG, *eſtant poſée* 2. *LF*, *ſera* ℞20: *LG*, ℞20+2; *LK*, ℞20.—2.

PROP. IIL. PROB. XXIV.

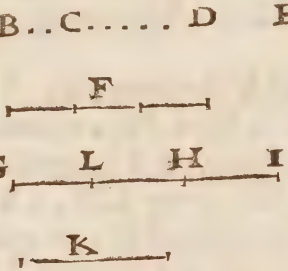
54. 92. Trouuer le 6e. Binome & la 6e. Apotome.

1. Que le nombre non quaré BD, ſoit diuiſé en deus nombres BC, CD, premiers entre eus, qui ne ſoient pas quarez, & ſoit pris encores le nombre quaré E. Or le *a* nombre BD, ſera premier aus nombres BC, CD, & par conſequent *b* n'aura proportion ny à l'vn ny à l'autre de nombre quaré à nombre quaré, *c* puis qu'eſtant premier à tous les deus il ne ſera ſemblable ny à l'vn ny à l'autre. Et parce qu'E, eſt nombre quaré, & non pas BD, les nombres E, BD, n'auront pas non plus proportion de nombre quaré à nombre quaré.

a 17. p. Ar.

b Ani 6. p. Arit. art. 5.

c Ibid. art. 2.



2. Soit fait maintenant come E, à BD, ainſi le quaré de la Rationele propoſée F, au quaré de GH; & come BD, à BC, ainſi le quaré de GH, au quaré d'HI. Ie dis que la totale GI, eſt ſiziéme Binomiale.

3. Premierement on prouuera come en la 45. prop. que les lignes GH, HI, ſont Rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement, & entre elles, & à la Rationele propoſée, puiſque par la conſtruction, tous leurs quarez ſont come nombre à nombre, mais non pas come nombre quaré à nombre quaré.

4. Que la diference des quarez de GH, HI, ſoit le quaré de K. On prouuera encores que come BD, à CD, qui n'ont pas proportion de nombre quaré à nombre quaré, ainſi le quaré de GH, au quaré de K; & partant les lignes GH, & K, ſont incomenſurables de longueur. Donc la ligne GI, eſt ſiziéme Binomiale.

Et GL, diferenee de GH, HI, ſera 6e. Apotome.

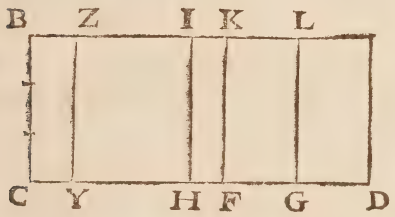
Aplic.

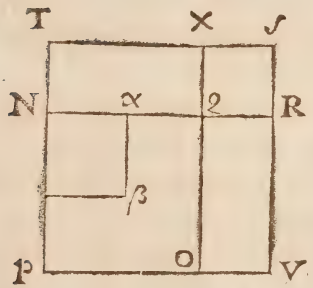
Aplication des nombres.

Suiuant cette construction, GH, sera ℞7. *HI*, ℞2. *GI*, ℞7+℞2 : *GL* ℞7—℞2.

PROP. IL. TEOR. XXXII. 55:92.

Le rectangle de la Rationele proposée & d'vn premier Binome, est egal au quaré d'vn Binome. Et le rectangle de la Rationele proposee, & d'vne premiere Apotome, est egal au quaré d'vne Apotome.





1. Que le rectangle BD, soit compris sous la Rationele proposée BC, & sous le premier Binome CD. Ie dis que la ligne dont le quaré est egal à cét espace, est Binomiale.

2. Que les noms de CD, soient CF, FD; & FG, moitié de FD : puis ayant *a* diuisé CF, au point H, en sorte que le rectangle CHF, soit egal à la quatriéme partie du quaré de FD, qui est à dire *b* au quaré d'FG; soient eleuées les lignes HI, FK, GL, paraleles à BC : soit encores décrit le quaré PQ, egal au rectangle BH, & sur NQ, prolongée autant qu'il sera besoin, le quaré QS, égal au rectangle IF, en sorte que les quarez PQ, QS, soient conioins en l'angle Q : & en fin soient prolongées SX, PN, iusques à ce qu'elles se rencontrent en T, & SR, PO, iusques à ce qu'elles se rencontrent en V. Or les lignes OQ, QX, *c* feront vne seule ligne droite, puisque les angles au somet Q, sont egaus, &

a 5. Lem.
b 4. 2.
c 14. 1.

parce que NQ, QO, ſont égales & RQ, QX auſſi égales, les toutes NR, OX, ſeront auſſi egales. Et les lignes
a 34.1. TP, SV, eſtant *a* egales à XO; & TS, PV, à NR, les vnes & les autres ſeront egales entre elles, & par conſequent le rectangle PS, ſera quaré.

b 2.art. 3. Puiſque FG, eſt *b* moyene proportionele entre CH, & HF, le rectangle KG, ſera *c* moyen proportionel entre CI, IF, (c'eſt à dire entre PQ, QS,) puiſque les rectangles
d 1.6. CI, KG, IF, *d* ſont en meſme proportion que les lignes CH, FG, HF. Or le rectangle OR, ou ſon egal TQ, eſt auſſi
e Lem. 5. *e* moyen proportionel, entre PQ, QS; donc le rectangle OR, eſt egal au rectangle KG; & les deus rectangles OR,
f 41.1. TQ, qui ſont *f* egaus entre eus, ſeront egaus aus deus egaus KG, LD; & en fin tout le rectangle BD, à tout le quaré PS. Il faut donc prouuer que NR, coté de PS, eſt Binomiale.

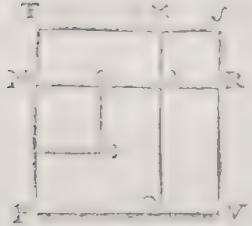
4. Parce que CD, eſt premiere Binomiale, & que par conſequent CF, eſt comenſurable de longueur au coté de la diference des quarez des noms; CF, eſtant diuiſée en H, ſelon
g 16.p. le cinquiéme Lem. les ſegmens CH, HF, ſeront *g* comen-
h 14.p. ſurables de longueur entre eus, & *h* partant auſſi à la toute CF, laquele eſtant Rationele & comenſurable de longueur à BC, (puiſque CD, eſt premier Binome) CH, HF, ſeront auſsi Rationeles, & comenſurables de longueur à BC.

5. Donc les rectangles BH, IF, c'eſt à dire PQ, QS,
i 18.p. ſont *i* Rationaus, & les lignes NQ, QR, Rationeles.

6. De plus, parce que CF, FD, ſont incomenſurables de longueur, BF, KD, qui ſont en meſme proportion, ſeront
K An.8. p. *k* incomenſurables, & partant BF, eſtant Rationel, KD, ſera irrationel. & auſſi ſa moitié KG, c'eſt à dire le rectangle OR, qui pour la meſme raiſon ſera incomenſurable
l 5.art. au *l* Rationel PQ.

7. Or les lignes NQ, QR, ſont en meſme proportion
m An.8. p. que PQ, OR, donc NQ, QR, *m* ſont incomenſurables de
n 5.art. longueur. Et parce qu'elles ſont *n* Rationeles, elles ſeront comenſurables de puiſſance ſeulement, & ainſi la toute NR,
o 35.p. *o* eſt Binomiale.

[illegible] figure a esté [illegible] entre les pages 210. & 211 [illegible]
[illegible] 211. & qu'elle sorte hors au livre estant [illegible]
[illegible] est la mesme que celle de la page 209. & sert pour le reste de
cette 49. Prop. & pour les cinq suivantes.



8. Que la ligne FY, soit maintenant prise egale à FD, & soit tirée la paralele YZ, la ligne CY, *a* sera premiere Apotome par la definition. Ie dis que le rectangle CZ, est egal au quaré d'vne Apotome. *a* 33.9.

9. Puisqu'FY, est egale à FD; YK, sera *b* egal à KD, c'est à dire aus deus rectangles OR, TQ. Or CK, est par la construction egal à PQ, QS; donc CZ, qui est egal à CK, moins YK; sera aussi egal à PQ, QS, moins les deus rectangles OR, TQ. *b* 1.6.

10. Soit encores prise en NQ, la ligne Qα, egale à QR; le reste Nα, *c* sera Apotome, puisque NR, *d* est Binome. Or le quaré d'Nα, laquelle est diference d'NQ, QR, est *e* egal aus quarés PQ, QS, moins les deus rectangles OR, TQ; donc le rectangle CZ, qui par le 9. art. est aussi egal à PQ, QS, moins OR, TQ; est egal au quaré de l'Apotome Nα. Ce qu'il faloit &c. *c* 33.9. *d* 7. art. *e* Scol. 7.2.

61: 98

COROL.

Le quaré de la Binomiale apliqué à la Rationele proposée, a pour largeur vne premiere Binomiale.

Et le quaré de l'Apotome a par la mesme aplication, vne premiere Apotome pour largeur.

Car puisque par cette prop. le rectangle de la Rationele proposée, & d'vne premiere Binomiale, est egal au quaré d'vn Binome, le Binome est la moyene proportionele entre la Rationele proposée & vn premier Binome: & partant l'vne des extremes de la proportion estant posée la Rationele, l'autre sera necessairement premiere Binomiale.

Et par la mesme raison la largeur du quaré de l'Apotome, est aussi premiere Apotome.

Aplication des nombres.

Que BC, soit 3, *CD*, 8+℞28, *CY*, 8—℞28: *BD, sera* 24+℞252, *BY*, 24—℞252; *BH, ou PQ*, 21; *IF, ou QS*, 3; *CH*, 7: *HF*, 1: *FG, ou GD*, ℞7: *KG*,

ou TQ, R63 : NQ, R21 : QR, R3 : NR, R21+R3 : $N\alpha$, R21—R3.

Anotat. I.

Euclide ne determine pas icy quelle sorte de Binome a son quaré egal au rectangle de la Rationele & de la premiere Binomiale, parce que ce peut estre quelque sorte de Binome que ce soit, du premier, deusiéme, troisiéme ordre &c. sans qu'il soit posible de le definir: par exemple, le premier Binome 2+R2. a son quaré egal au produit de 2. & 3+R8. sauoir 6+R32. qui est premier Binome. Mais le produit de 3. & 7+R48. est egal au quaré de R12+3. qui est segond Binome. Et ainsi des autres.

Le mesme se doit entendre des Apotomes.

Il faut remarquer que cette proposition ne se peut entendre que de la Rationele proposée, & non pas de toutes sortes de Rationeles, parce que si en la derniere figure, BC, n'estoit la proposée, on ne pouroit rien conclure, & CF, qui est le plus grand nom de la premiere Binomiale CD, ne luy seroit pas necessairement comensurable de longueur. C'est pourquoy nous auons iugé plus à propos de l'inserer, non pas seulement dans la demonstration, come quelques vns se contentent de faire, mais encores dans la proposition, ce que la plus part ne font pas; & mesmes quelques vns n'en parlent point du tout, & peuuent donner sujet de croire d'abord que cette proposition est veritable de toutes sortes de Rationeles. Mais il est aisé de reconoitre que ny le Teoreme, ny son Corolaire, qui est sa conuerse, ne se peuuent entendre que de la proposée ou de sa comensurable de longueur.

Anotat. II.

On pouroit peut estre douter de la verité du dernier Corolaire, & de ceus des cinq propositions suiuantes, sur ce que leurs conuerses ne sont pas generalement vrayes : car encores que le quaré de la Binomiale apliqué à la Rationele proposée, ayt pour largeur vne premiere Binomiale ; il n'est pas neanmoins toujours veritable qu'estant apliqué à vne premiere Binomiale, il ayt pour largeur la Rationele proposée. Mais cette dificulté nôte rien de la certitude de nos Corolaires, à cause de la diference qu'il y a entre eus & leurs conuerses, laquelle consiste en ce qu'il n'y a qu'vne seule Rationele proposée, au lieu qu'il y a par exemple vne infinité de premieres Binomiales, (le mesme se doit entendre de tous autres ordres de Binomes, & aussi de tous les ordres d'Apotomes) entre lesqueles il n'y en a qu'vne seule qui auec la Rationele proposée, face vn rectangle egal au quaré d'vne Binomiale donée, ce qui est cause que ce quaré estant apliqué à toute autre premiere Binomiale, n'aura pas pour largeur la Rationele proposée : & ainsi la conuerse du premier Corolaire ne peut estre toujours vraye. Au contraire n'y ayant qu'vne seule Rationele proposée ; le quaré d'vn Binome doné y estant apliqué, doit necessairement auoir pour largeur vne premiere Binomiale par la conuerse de cette 49. prop.

Prop. L. Teor. XXXIII.

56. 93.

Le rectangle de la Rationele proposée & d'vn segond Binome, est egal au quaré d'vne premiere Bimediale. Et le rectangle de la Rationele proposée & d'vne segonde Apotome, est egal au quaré d'vn premier Residu Medial.

1. Que l'espace BD, soit compris sous la proposée BC, & la segonde Binomiale CD. Ie dis que le rectangle BD, est egal au quaré d'vne premiere Bimediale.

2. Ayant diuisé CD, en ses noms au point F, & fait le rectangle CHF, egal au quaré de FG, moitié d'FD, soit fait le reste de la construction, come en la precedente; on prouuera encores que le quaré PS, est egal au rectangle BD. Il faut donc prouuer qu'NR, coté de PS, est premiere Bimediale.

3. Puisque CD, est segonde Binomiale, CF, est comensurable de longueur au coté de la diference des quarés des noms, & partant les segmens CH, HF, seront *a* comensurables de longueur entre eus, & aussi à la *b* toute CF; laquele estant comensurable de puissance seulement à BC; les segmens CH, HF, ne seront aussi *c* comensurables que de puissance à BC; & ainsi les rectangles CI, IF, c'est à dire PQ, QS, seront espaces *d* Moyens, & les lignes NQ, QR, Moyenes.

a 16. *p.* *b* 14. *p.* *c* *An.* 12. *p.* *d* 18. *p.*

4. De plus puisque CD, est segond Binome, FD, est comensurable de longueur à BC, ou à KF, son egale; & partant KD, sera *e* Rationel, & aussi sa *f* moitié KG, c'est à dire le rectangle OR.

e 18. *p.* *f* *Lem.* 8.

5. Donc PQ, estant *g* Moyen, & OR, *h* Rationel, ces espaces seront incomensurables, & les lignes NQ, QR, qui sont en mesme proportion, incomensurables de *i* longueur.

g *art.* 3. *h* 4. *art.* *i* *An.* 8. *p.*

6. Mais parce que les segmens CH, HF, sont comensurables de longueur, les rectangles CI, IF c'est à dire PQ, QS, seront *l* comensurables; & ainsi leurs cotés NQ, QR, sont comensurables de puissance, & *m* non de longueur.

K 3. *art.* *l* 8. *p.* *m* 5. *art.*

7. Donc puisqu'NQ, QR, sont *n* Moyenes, comensurables de *o* puissance seulement, & que leur rectangle OR, est *p* Rationel, la toute NR, est premiere *q* Bimediale.

n 3. *art.* *o* 6. *art.* *p* 4. *art.* *q* 3. 4. *p.*

Et si on prend en CF, la ligne YF, egale à FD, & en NQ, la ligne aQ, egale à QR; la ligne CY, sera segonde

Apotome, & $N\alpha$, premier Residu Medial : & on prouuera come en la precedente que BY, est egal au quaré d'$N\alpha$.

COROL. 62 :

Le quaré de la premiere Bimediale apliqué à la Rationele propoſée, a pour largeur vne ſegonde Binomiale. Et le quaré du premier Residu Medial, a pour largeur vne ſegonde Apotome. 99.

Ce qui ſe prouue de meſme qu'en la precedente.

Aplication des nombres.

Que BC, ſoit 2. CD, ℞180+10 : *CH, ſera* ℞125 : *HF,* ℞5 ; *BH, ou PQ,* ℞500 ; *IF, ou QS,* ℞20 ; *NR,* ℞500+℞20 ; *Nα,* ℞500—℞20. *leurs quarez PS, Nβ, ou leurs egaus BD, BY,* ℞720+20. & ℞720—20.

PROP. LI. TEOR. XXXIV. 57 :

Le rectangle de la Rationele propoſée & d'vne troiſieme Binomiale, eſt egal au quaré d'vne ſegonde Bimediale. Et celuy de la Rationele propoſee & d'vne troiſieme Apotome, eſt egal au quaré d'vn ſegond Residu Medial. 94.

Que l'eſpace BD, ſoit compris ſous la Rationele propoſée BC, & ſous le troiſiéme Binome CD. Ie dis que ce rectangle, BD, eſt egal au quaré d'vne ſegonde Bimediale.

1. Ayant conſtruit come aus deus precedentes, on prouuera come en la derniere prop. que PQ, QS ſont eſpaces Moyens, & leurs cotés NQ, QR, lignes Moyenes, comenſurables de puiſſance ſeulement.

2. De plus les ſegmens CH, HF, ſeront encores prouués comenſurables de longueur, puiſque CD, eſt troiſiéme Binome ; & partant chacun d'eus eſt *a* comenſurable de longueur à la toute CF, laquele eſtant incomenſurable de longueur à BC, les meſmes ſegmens ſeront auſſi *b* incomenſu- *a* 14. *p.* *b* 11. *p.*

rables de longueur à BC. Et parce que FG, eſt comenſurable de longueur à FD, come eſtant ſa moitié, les lignes CH, FG, eſtans comenſurables de longueur aus incomenſurables de longueur CF, FD, ſont *a* incomenſurables de longueur entre elles. Or come CH, à FG, ainſi CI, à KG, c'eſt à dire NO, à OR; donc les eſpaces CI, KG, ou leurs egaus NO, OR, ſont *b* incomenſurables, & partant les lignes NQ, QR, qui ſont en meſme proportion; ſont *c* incomenſurables de longueur.

a An. 11. 10.

b 8. 10.

c An. 8. 10.

3. En fin parce que KD, eſt eſpace *d* Moyen & auſſi ſa *e* moitié KG; OR, qui eſt ſon egal, & eſt le rectangle d'NQ, QR, puiſque QO eſt egal à NQ, ſera auſſi eſpace moyen.

d 18. 10.

e Cor. 30. 10.

4. La ligne NR, dont le quaré PS, eſt come auparauant egal, à BD, a donc toutes les conditions d'vne ſegonde Bimediale, puiſque ſes parties NQ, QR, *f* ſont Moyenes *g* incomenſurables de longueur, & comenſurables de *h* puiſſance, & que leur rectangle eſt *i* Moyen; & partant eſt ſegonde Bimediale.

f 11. art. *g* 2. art. *h* 1. art. *i* 3. art.

5. Et ſi on prend YF, egale à FD; & αQ, egale à QR; CY, ſera troiſiéme Apotome, & Nα, ſegond Reſidu Medial, & le rectangle BY, compris ſous la propoſée BC, & la troiſiéme Apotome CY, ſera encores prouué egal au quaré du ſegond Reſidu Medial Nα.

63. 100.

Corol.

Le quaré de la ſegonde Bimediale apliqué a la Rationele propoſée, a pour largeur vne troiſiéme Binomiale. Et le quaré du ſegond Reſidu Medial a pour largeur vne troiſiéme Apotome.

Aplication des nombres.

Que BC, ſoit 2, *CD*, ℞98 + ℞48: *BD, ou PS, ſera* ℞392 + ℞192; *CH* ℞72; *HF*, ℞2; *BH, ou PQ*, ℞288; *ſon coté NQ*, ℞288; *QS*, ℞8, *& ſon coté QR*, ℞8: *FG*, ℞12: *& KG, ou OR*, ℞48: *CY*, ℞98 — ℞48: *Nβ*,

℞392

R392—R192, & son coté Nα, R288—R8. qui est segond Residu Medial, & en fin NR sera R288 + R8. segonde Bimediale.

Prop. LII. Teor. XXXV. 587 95.

Le rectangle de la Rationele proposée & du quatriéme Binome est egal au quaré d'vne Maieure. Et le rectangle de la Rationele proposée, & de la quatriéme Apotome, est egal au quaré d'vne Mineure.

1. Que le rectangle BD, soit compris sous la Rationele proposée BC, & sous la quatriéme Binomiale CD. Ie dis que BD, est egal au quaré d'vne Maieure.

2. Ayant construit come auparauant, puisque par la defin. du quatriéme Binome, CF, est incomensurable de longueur au coté de la diference des quarez de CF, FD, les segmens CH, HF, seront *a* incomensurables de longueur, & partant les rectangles CI, IF, qui sont en mesme proportion, seront *b* incomensurables, c'est à dire leurs egaus PQ, QS; & leurs cotés NQ, QR, *c* incomensurables de puissance. *a* 17. 6. *b* An. 8 p. *c* 3. dese.

3. Et parce que CD, est quatriéme Binome, & que par consequent CF, est comensurable de longueur à BC; l'espace BF, (c'est à dire le composé des quarez PQ, QS,) sera *d* Rationel. *d* 18. 6.

4. Mais parce que FD, est comensurable de puissance seulement à KF, ou BC, le *e* rectangle KD, sera Moyen, & partant sa moitié KG, c'est à dire OR, rectangle de NQ, QR, (puisque NQ, est egale à QO) sera aussi espace Moyen. *e* 18. 9.

5. Donc NQ, & QR sont *f* incomensurables de puissance, le composé de leurs quarez est *g* Rationel, & leur rectangle *h* Moyen; & ainsi NR, dont le quaré est come en la 49. prop. egal à BD, sera ligne irrationele apelée Maieure. *f* 2. art. *g* 3. art. *h* 4. art.

6. Que si l'on retranche de CF, la ligne FY egale à FD; & de NQ, la ligne Qα, egale à QR; CY sera quatriéme

Apotome, Nα, Mineure, & le rectangle BY, compris ſous la Rationele & la quatriéme Apotome CY, ſera prouué, come auparauant, egal au quaré de la Mineure Nα.

64: 101. COROL.

Le quaré de la Majeure apliqué à la Rationele propoſée, a pour largeur vne quatriéme Binomiale. Et le quaré de la Mineure a pour largeur vne quatriéme Apotome.

Aplication des nombres.

Que FC, ſoit 2, *CF*, 6, *FD*, ℞8; *CD*, *ſera* 6+℞8, *CH*, 6—℞8: *CH*, 3+℞7: *HF*, 3—℞7: *CI*, *ou PQ*, 6+℞28; *IF*, *ou QS*, 6—℞28; *KG*, *ou OR*, ℞8: *BD*, *ou PS*, 12+℞32; *NQ*, ℞(6+℞28); *QR* ℞(6—℞28); *NR*, ℞(6+℞28)+℞(6—℞28); *Nα*, ℞(6+℞28)—℞(6—℞28) *& Nβ*, 12—℞32.

59: 96. PROP. LIII. TEOR. XXXVI.

Le rectangle de la Rationele propoſée & d'vne cinquiéme Binomiale, eſt egal au quaré d'vne Rationele-Moyene. Et le rectangle de la propoſée & d'vne cinquiéme Apotome, eſt egal au quaré d'vn Reſidu de Rationele-Moyene.

1. Que le rectangle BD, ſoit compris ſous la Rationele propoſée BC, & la cinquiéme Binomiale CD. Ie dis que cét eſpace BD, eſt egal au quaré d'vne cinquiéme Binomiale.

2. Ayant fait encores la meſme conſtruction qu'aus precedentes, on prouuera come auparauant que le quaré PS, eſt egal à BD; & reſte à prouuer que ſon coté NR, eſt Rationele-Moyene.

3. Parce que les segmens CH, HF, sont incomensurables de longueur, on prouuera come en la derniere que NQ, QR, sont incomensurables de puissance.

4. De plus, par la definition du cinquiéme Binome CF, sera incomensurable de longueur à BC, & partant BF; c'est à dire le composé de PQ, QS, quarez de NQ, QR sera espace *a* Moyen, mais FD, estant par la mesme definition comensurable de longueur à KF, ou BC, le rectangle KD, sera *b* Rationel, & par consequent aussi sa moitié KG, c'est à dire OR, sera Rationel. *a* 18. *p.* *b* 18. *p.*

5. Donc les lignes NQ, QR, estant *c* incomensurables de puissance, le composé de leurs quarés, estant *d* Moyen, & leur rectangle OR, *e* Rationel; la ligne NR, qui en est composee, *f* sera Rationele-Moyene. Et si on prend YF, egale à FD, & Qα, egale à QR; CY sera cinquiéme Apotome, & Nα, Residu de Rationele-Moyene: & le rectangle BY, sera come auparauant egal au quaré de Nα. *c* 3. *art.* *d* 4. *art.* *e* 4. *art.* *f* 37. *p.*

65.
102.

COROL.

Le quaré de la Rationele-Moyene apliqué à la Rationele proposée, a pour largeur vne cinquiéme Binomiale. Et le quaré du Residu de Rationele-Moyene a pour largeur vne cinquiéme Apotome.

Aplication des nombres.

Que BC, soit 2, *CD*, ℞12+2: *BD, ou PS, sera* ℞48 +4: *BH, ou PQ*, ℞12+℞8: *IF, ou QS*, ℞12—℞8: *NR*, ℞(℞12+℞8)+℞(℞12—℞8) *Nα*, ℞(℞12+℞8)—℞ (℞12—℞8) *Nβ*, ℞48—4.

60.
97.

PROP. LIV. TEOR. XXXVII.

Le rectangle de la Rationele propose & d'vne 6e. Binomiale, est egal au quaré d'vne Double-Moyene

Et le rectangle de la Rationele proposée & d'vne sizième Apotome est egal au quaré d'vn Residu de Double-Moyene.

1. Que le rectangle BD, soit compris sous la proposée BC, & la sizième Binomiale CD, Ie dis que cét espace BD, est egal au quaré d'vne Double-Moyene.

2. Ayant construit come aus precedentes propositions, on prouuera de mesme qu'auparauant, que le quaré PS, est egal au rectangle BD. Il faut donc prouuer que son coté NR, est Double-Moyene.

3. On prouuera come en la 52. que NQ, QR, sont incomensurables de puissance.

4. Et de mesme qu'en la derniere, que le composé des quarez PQ, QS, est Moyen.

5. Et parce que FD, par la definition du sizième Binome est incomensurable de longueur à KF, ou BC; KD, sera aussi *a* Moyen, & partant aussi sa *b* moitié KG, c'est à dire l'espace OR.

a 18. p. *b* Cor. 20 p.

6. De plus puisque CF, est incomensurable de longueur, à FD, & aussi à sa moitié FG, les rectangles BF, KG, seront incomensurables, & partant le composé de PQ, QS, qui est egal à BF, sera incomensurable à OR, qui est egal à KG.

c 3. ar. *d* 4. art. *e* 5. art. *f* 6. art.

Donc les lignes NQ, QR, estant *c* incomensurables de puissance, le composé de leurs quarés estant *d* Moyen, & leur rectangle aussi *e* Moyen, & *f* incomensurable au mesme composé: la ligne NR, qui en est composée, sera Double-moyene.

Et si on forme, come aus dernieres propositions, la sizième Apotome CY, & le Residu de Double moyene Nα, on prouuera encores que le rectangle BY, compris sous la proposée BC, & la sizième Apotome CY, est egal au quaré d Nα, Residu de Double-moyene.

66: 103.

COROL.

Le quaré de la Double-moyene apliqué à la Rationele proposée, a pour largeur vn sizieme Binome.

Et le quaré du *Resídu de Double-moyene*, a pour largeur vne siziéme Apotome.

ANOTAT.

Les Corolaires des cinq dernieres propositions, se prouuent come celuy de la 49. prop. & tous sont autant de Teoremes separez dans Euclide, quoy que ce ne soit que des illations qui se deduisent facilement des sis dernieres propositions.

Aplication des nombres.

Que BC, soit 2; CF, ℞48, *FD*, ℞8, *CH, sera* ℞12 + ℞10; *HF*, ℞12 — ℞10; *BD, ou PS*, ℞192 + ℞32: *HB ou PQ*, ℞48 + ℞40: *IF, ou QS*, ℞48 — ℞40: *KG, ou OR*, ℞8: *NQ*, ℞(℞48 + ℞40); *QR*, ℞(℞48 — ℞40); *NR*, ℞(℞48 + ℞40) + ℞(℞48 — ℞40): *Nα*, ℞(℞48 + ℞40) — ℞(℞48 — ℞40), *& Nβ*, ℞192 — ℞32.

AVERTISSEMENT.

Les Figures de toutes les propositions suiuantes se trouueront toutes ensemble à la fin du dizième liure.

PROP. LV. TEOR. XXXVIII.

Si vne ligne droite est comensurable à quelcune des sis irrationeles faites par composition cy dessus mentionees, ou à quelcun de leurs *Resídus*: elle est de mesme nature que sa comensurable. Et si elle est comensurable de longueur à vne Binomiale ou à vne Apotome, elle est aussi de mesme ordre de Binomes ou d'Apotomes. Mais de quelque façon qu'vne ligne droite soit comensurable à vne Bimediale ou à vn *Resídu* Medial, elle sera tousiours de mesme ordre de Bimediales, ou de *Resídus* Mediaus. 61: 62: 63: 64: 65: 98: 99: 100: 101: 102:

1. Premierement que la ligne BC, soit comensurable ou de longueur ou de puissance seulement à la Binomiale FG. Ie dis

6 que la ligne BC, eſt auſſi Binomiale. Ayans diuiſé FG, en
* 10. ſes noms au point L; que la ligne BC, * ſoit diuiſee en meſme proportion au point D. Donc puiſque FL, LG, ſont comenſurables de puiſſance ſeulement, BD, DB, qui ſont en me-
a Cor. 8. p. me proportion, le *a* ſeront auſſi. G.

2. Et parce qu'en compoſant BC, eſt à BD, come FG, à FL, auſſi en permutant come BC, à FG, ainſi BD, à FL. Or
b An. 8. l. BC, eſt comenſurable à FG; donc BD, eſt *b* comenſurable à FL, & partant FL, eſtant Rationele par l'ipoteſe, BD, ſera auſſi Rationele, & par conſequent auſſi DC, ſa comenſurable.

c 1. art. d 1. art. 3. Donc puiſque BD, DC, ſont *c* Rationeles & comenſurables de *d* puiſſance ſeulement. BC, eſt Binomiale.

4. Que la ligne BC, ſoit maintenant comenſurable de longueur ou de puiſſance à la Bimediale FG; Ie dis que BC, eſt auſſi Bimediale & de meſme ordre qu'FG. Ayant conſtruit come pour le Binome, on prouuera de meſme qu'au Binome que les noms BD, DC, ſont comenſurables de puiſſance ſeulement. Et de meſme que les lignes BD, DC, ont eſté prouuez eſtre lignes Rationeles au ſegond article, elles ſeront icy prouuées Moyenes.

5. De plus puiſque par la conſtruction BD, eſt à DC, come FL, à LG & *e* come FL, à LG, ainſi le quaré de FL, au re-
e Lem. 7. ctangle FLG, & come BD, à DC, ainſi le quaré de BD, au rectangle BDC: le quaré de BD, ſera au rectangle BDC, come le quaré d'FL, au rectangle FLG, & en permutant come le quaré d'FL, au quaré de BD; ainſi le rectangle FLG, au rectangle BDC. Or le quaré de BD, eſt comenſurable au quaré d'FL, puiſque de meſme qu'au ſegond article BD, FL, ſeront prouuées comenſurables: donc le rectangle BDC, ſera comenſurable au rectangle FLG. Et partant ſi le rectangle FLG, eſt Rationel ou Moyen, le rectangle BDC, ſera auſſi
f Corol. 20. p. & 8. Lem. *f* Rationel ou Moyen, come eſtant comenſurable au rectangle FLG. Et ainſi la ligne BC, dont les parties ſont Moyenes comenſurables de puiſſance ſeulement, ſera Bimediale de meſme ordre que FG.

6. On prouuera de meſme pour les autres lignes irrationeles que les quarés homologues ſeront touſiours comenſurables, & les rectangles des parties, auſſi comenſurables.

g 22. 6. 7. Et parce que come le *g* quaré de FL, au quaré d'LG,

ainsi le quaré de BD, au quaré de DC; en composant, & en permutant le composé des quarés d'FL, LG, sera au composé des quarés de BD, DC, come le quaré d'FL, au quaré de BD. Or le quaré d'FL est *a* comensurable au quaré de BD; donc le composé des quarés d'FL, LG, est comensurable au composé des quarés de BD, DC; & partant le composé des quarés d'FL, LG, estant Rationel, ou Moyen, le composé des quarés de BD, DC sera aussi Rationel ou Moyen. *a* 1. art.

8. En fin parce que *b* come le quaré de FL, au quaré de BD, ainsi le rectangle FLG, au rectangle BDC, & come le quaré d'FL, au quaré de BD, ainsi le composé des quarés d'FL, LG, au composé des quarés de BD, DC: le rectangle FLG, sera au rectangle BDC, come le composé des quarés d'FL, LG, au composé des quarés de BD, DC; & en permutant comme le rectangle FLG, au composé des quarés d'FL, LG, ainsi le rectangle BDC, au composé des quarés de BD, DC. Et *c* partant si le rectangle FLG, est incomensurable au composé des quarés d'FL, LG; le rectangle BDC, est incomensurable au composé des quarés de BD, DC. *b* 5. art. *c* 8. p.

9. Et ainsi toutes les proprietés des parties d'FG, se trouuant aussi aus parties de la ligne BC, elles seront toutes deus de mesme nature d'irrationeles composées.

10. Que la ligne BC, soit maintenant comensurable de longueur à la Binomiale FG. Ie dis que BC, est de mesme ordre de Binomes qu'FG.

11. Puisque come FL, à LG, ainsi BD, à DC; en permutant FL, sera à BD, come LG, à DC.

12. De plus en composant come FG, à LG, ainsi BC, à DC, & en permutant come FG, à BC, ainsi LG, à DC, c'est à *d* dire FL, à BD. Or FG, est comensurable de longueur à BC, par l'ipotese; donc LG, est comensurable de longueur à DC; & FL, à BD. Et partant si FL, est comensurable de longueur ou de puissance seulement à la proposee, BD, luy sera aussi *e* comensurable de longueur ou de puissance seulement, & DC, sera par la mesme raison comensurable à la propofée, de mesme sorte que LG. Et si FL, LG, ne sont toutes deus comensurables que de puissance à *d* 11. art. *e* Ax. 10. p.

la propoſée, BD, DC, ne luy ſeront non plus comenſurables que de puiſſance.

13. En fin ſi FL, eſt comenſurable ou incom. de longueur au coté de la diference des quarés d'FL, LG, auſſi BD, ſera
a 13. 1. comenſurable *a* ou incomenſurable au coté de la diference des quarés de BD, DC, à cauſe de l'egalité des proportions d'FL à LG, & de BD, à DC.

Et partant BC, ſera de meſme ordre de Binomes que FG.

14. Tout ce qui a eſté prouué des irrationeles compoſées, doit eſtre tenu pour demontré des irrationeles diminuées, ſans qu'il ſoit beſoin d'autre preuue, puiſque les noms de quelque Reſidu que ce ſoit ſont touſiours les meſmes que ceus de l'irrationele qui luy répond par compoſition. Par exemple ſi BM eſt vne Apotome & que FN, luy ſoit comenſurable, il ſera fort aiſé de prouuer qu'FN, eſt Apotome. Car ſi on prend MD, conuenante de BM, & qu'à BM, MD, FN, on trouue la quatriéme proportionele NL; en permutant come BM à FN, ainſi MD, à NL, & partant puiſque BM, FN, ſont comenſurables par l'ipoteſe, MD, NL, ſeront auſſi comenſurables. Et parce que en compoſant BD, eſt à MD, come FL à NL, par inuerſion NL, ſera à FL come MD, à BD; & en permutant come NL, à MD, ainſi FL, à BD. Or NL, MD, ont eſté prouuées comenſurables, donc FL, BD, ſeront auſſi comenſurables.

15. Soit priſe DC, egale à MD; & LG egale à NL. La ligne BC, ſera Binomiale par la defin. Et puiſque la toute FL, a eſté prouuée comenſurable à la toute BD, ſur ce que la partie BM, eſt comenſurable à la partie FN, & que les parties BM, MD, ſont proportioneles aus parties FN, NL, on prouuera auſſi que la toute BC, eſt comenſurable à la toute FG, ſur ce que la partie BD, eſt comenſurable à la partie FL, & que les parties BD, DC, ſont proportioneles aus parties FL, LG, car DC, MD, ſont egales come auſſi LG, NL, & partant puiſque BD eſt à MD, come FL, à NL; BD, ſera auſſi à DC, come FL, à LG.

16. Donc FG, comenſurable à la Binomiale BC, ſera auſsi Binomiale. Et parce que FN, a meſme proportion auec les parties de FG que BM auec celles BC, il faudra que FN, ſoit l'Apotome du Binome FG, come BM, eſt

l'Apotome

l'Apotome de BC, puis qu'on argumentera tout de meſme de FL à NL, que d'FL, à LG, & qu'FL, LG, eſtant Rationeles comenſurables de puiſſance ſeulement, FL, NL, le ſeront auſsi, & partant FN, ſera Apotome.

17. Et l'on demontrera aiſément par cette metode que ſi FN, eſt comenſurable de longueur à l'Apotome BM, elle eſt auſsi Apotome de meſme ordre en ſe ſeruant de ce qui a eſté dit au 12. & au 13. art.

18. Il ſera auſsi fort facile de demontrer que les lignes comenſurables aus autres Reſidus, ſeront auſsi Reſidus de meſme nature, puiſqu'en prenant leurs conuenantes & les doublant, on formera toujours les lignes irrationeles compoſées qui leur répondent; & vſant de meſmes argumens que nous auons fait au 16. art. pour le Binome, on prouuera toujours que toutes les proprietez d'vn Reſidu conuienent à vne ligne qui luy ſera comenſurable, à cauſe de l'egalité des proportions.

Corol. I.

Si vne ligne droite eſt comenſurable de longueur à vne Binomiale ou à vne Apotome, elle a ſes noms comenſurables de longueur à ceus de la Binomiale ou de l'Apotome, & en meſme proportion.

Car il a eſté prouué au 12. art. que les noms de la Binomiale BC, ſont en meſme proportion & comenſurables de longueur à ceus de FG; ſur ce que BC, FG, ſont comenſurables de longueur, ce qui s'apliquera facilement aus Apotomes come nous auons dit au 17. art.

Corol II.

Si vne ligne droite eſt comenſurable à quelcune des cinq autres irrationeles compoſées ou diminuées, elle eſt de méme eſpece, & a ſes noms comenſurables à ceus de ſa comenſurable.

Aplication des nombres.

Si vn Binome est $6+\sqrt{20}$. *son comensurable de puissance seulement* $\sqrt{18}+\sqrt{10}$. *sera du troisiéme ordre au lieu que* $6+\sqrt{20}$. *est du premier. Mais* $3+\sqrt{5}$. *qui luy est comensurable de longueur, est aussi du premier ordre. Et si on prend le premier Bimedial* $\sqrt{8}+\sqrt{2}$. *bien que* $\sqrt{32}+\sqrt{8}$. *ne luy soit comensurable que de puissance, il ne laisse pas d'estre aussi premier Bimedial. En fin le nombre* $\sqrt{(6+\sqrt{18})}+\sqrt{(6-\sqrt{18})}$ *estant comensurable de puissance seulement au nombre Majeur* $\sqrt{(4+\sqrt{8})}+\sqrt{(4-\sqrt{8})}$ *est aussi Majeur. Et ainsi des autres tant composez que diminuez.*

Anotation.

Euclide fait dis propositions de celle-cy, & dit du Binome & de l'Apotome, des deus Bimediales & de leurs Residus, que les lignes qui leur sont comensurables de longueur, sont aussi de mesme nature & de mesme ordre, sans parler aucunement de leurs comensurables de puissance seulement. Nous auons proposé celle-cy vn peu plus generalement, & fait voir que toute ligne comensurable de quelque façon que ce soit à vne Bimediale, est aussi Bimediale, & de mesme ordre, de sorte que ce mot (de longueur) est superflu dans la 68. prop. laquele doit estre conceue plus generalement, puisqu'elle est veritable des comensurables de puissance aussi bien que des comensurables de longueur.

Et pour les Binomiales il a esté prouué qu'vne ligne comensurable de longueur ou de puissance à vn Binome, est aussi Binomiale, quoy qu'elle ne soit pas toujours de mesme ordre, si elle ne luy est aussi comensurable de longueur. Et

meſmes il eſt abſolument impoſſible, comé quelques vns ont remarqué, qu'il arriue qu'elle ſoit de meſme ordre, ſi ce n'eſt au troiſiéme ou au ſiziéme Binome. Car que le Binome AB, ſoit par exemple du premier ordre, & que la ligne CD, luy ſoit ſeulement comenſurable de puiſſance. Si donc on vouloit dire que CD, fut auſſi premiere Binomiale, les ayant diuiſées en leurs noms aus poins E, F, les plus grans noms AE, CF, ſeront comenſurables de longueur à la Rationele propoſee par la definition, & partant auſſi entre eus. Or come le plus grand nom AE, au plus grand nom CF, ainſi la toute AB, à la toute CD, come nous auons demontré au 2. art. donc, AB, CD, ſont comenſurables de longueur, contre l'ipoteſe. Le meſme ſe prouuera des ſegond, quatriéme & cinquiéme Binomes, parce qu'ils ont toujours vn nom comenſurable de longueur à la propoſée.

Il eſt neanmoins toujours vray de dire que ſi vn Binome eſt du premier, ſegond, ou troiſiéme ordre, la ligne qui luy ſera comenſurable de puiſſance ſeulement, ſera toujours du premier, ſegond, ou troiſiéme, & que s'il eſt du quatriéme, cinquiéme ou ſiziéme, ſa comenſurable de puiſſance ſera toujours du quatriéme, cinquiéme ou ſiziéme, car puis qu'il y aura toujours meſme proportion du plus grand nom, au moindre, que du plus grand au moindre, ſi le plus grand nom eſt comenſurable ou incomenſurable de longueur au coté de la diference des quarez en vn Binome, la meſme choſe ſe trouuera auſſi neceſſairement en l'autre Binome. Et partant l'vn eſtant premier, ſegond ou troiſieme, l'autre ſera auſſi premier, ſegond ou troiſiéme, &c.

PROP. LVI. PROB. XXXIX. 66. 103.

Si vn eſpace eſt compoſé d'vn Rationel, & d'vn

Moyen, & que le Rationel ſoit plus grand que le moyen ; cét eſpace total eſt egal au quaré d'vne Binomiale ou d'vne Majeure. Et ſi d'vn eſpace Rationel on en ôte vn Moyen, le reſte eſt egal au quaré d'vne Apotome ou d'vne Mineure.

1. Que l'eſpace BI, ſoit compoſé des deus eſpaces inegaus BC, CD, dont le plus grand BC, ſoit Rationel, & l'autre Moyen. Ie dis que BI, eſt egal au quaré d'vne Binomiale ou d'vne Maieure.

2. Que BI, apliqué à la Rationele propoſée EF, face la largeur FK, & le Rationel BC, la largeur FG, & le reſte HK, ſera egal à CD.

a Cor. 18. p. 3. Le largeur FG ſera *a* Rationele comenſurable de longueur à EF, & la largeur GK, ſera auſſi Rationele, mais *b* 19. p. *b* comenſurable de puiſſance ſeulement à GH, ou à EF, ſon egale.

4. Et partant EF, FG, eſtans comenſurables de longueur & l'vne des deus, EF, comenſurable de puiſſance ſeulement à GK ; l'autre FG, ſera auſſi *c* comenſurable de puiſſance ſeulement à GK. *c* An. 10. p.

d 33. p. 5. Et parce que FG, GK, ſont Rationeles, la *d* toute FK ſera Binomiale.

6. Et puiſque le plus grand nom FG, eſt comenſurable *e* ſegõdes def. de longueur à la propoſée EF, elle *e* ſera ou premiere ou quatriéme Binomiale. Si FK, eſt premiere Binomiale, le *f* 49. p. rectangle EK c'eſt à dire BI, ſera egal au *f* quaré d'vne Binomiale. Mais ſi elle eſt quatriéme Binomiale, il ſera egal *g* 52. p. au quaré d'vne *g* Maieure.

7. Soit maintenant retranché de l'eſpace Rationel BC, l'eſpace NC, egal à l'eſpace Moyen CD, en prenant MC, egale à CI : & de l'eſpace EG, l'eſpace PH, egal à HK, en prenant PG, egal à GK. Ie dis que l'eſpace BM, eſt egal au quaré d'vne Apotome, ou d'vne Mineure.

8. Puiſque par la conſtruction, BC, EG ſont egaus, & auſſi NC, PH, le reſte BM, ſera egal au reſte EP.

9. Et parce que FP, eſt Apotome de meſme ordre que le Binome, FK, come eſtant diference d'FG, GK, elle ſera

premiere ou quatriéme. Si elle eſt premiere, EP, c'eſt à dire BM, ſera egal au quaré d'vne *a* Apotome. Si elle eſt quatriéme, il ſera egal au quaré d'vne *b* Mineure. *a* 49. *p.* *b* 52. *p.*

Aplication des nombres.

Si on ioint enſemble les nombres plans 12. *&* R̸80. *la racine de* 12 + R̸80. *eſt* R̸10 + R̸2. *qui eſt vn Binome.*

Mais la racine de 8 + R̸24. *eſt le nombre Maieur* R̸(4 + R̸10) + R̸(4 — R̸10) *Et ſi on prend les Reſidus des meſmes nombres, on aura auſſi des Reſidus de meſme nature, pour leurs Racines.*

Prop. LVII. Teor. XL. 66. 104.

Si vn eſpace eſt compoſé de deus eſpaces inegaus, dont le moindre ſoit Rationel, & l'autre Moyen : il eſt egal au quaré d'vne premiere Bimediale, ou d'vne Rationele-Moyene. Et la diference de ces eſpaces, eſt egale au quaré de l'vn des Reſidus ſemblables.

Que l'eſpace BI, ſoit compoſé des eſpaces BC, CD, deſquels le plus grand BC, ſoit Moyen, & le moindre CD, Rationel. Ie dis que BI, eſt egal au quaré d'vne premiere Bimediale, ou à celuy d'vne Rationele-Moyene.

Ayant conſtruit come en la preced. prop. FK, ſera encores prouuée Binomiale.

Et parce que ſon *c* moindre nom GK, eſt comenſurable de longueur à la propoſée EF, elle ſera ou ſegonde ou cinquiéme Binomiale. Si FK, eſt ſegonde Binomiale, EK, c'eſt à dire BI, ſera egal au quaré d'vne premiere *d* Bimediale. Mais ſi FK, eſt cinquiéme Binomiale, il ſera egal au quaré d'vne *e* Rationele-Moyene. *c* Cor. 18. *p.* *d* 50. *p.* *e* 53. *p.*

On prouuera encores come auparauant qu'EP, ſera egal à BM; Et parce qu'FB, ſera ou ſegonde ou cinquiéme Apotome; EP, c'eſt à dire BM, ſera egal au quaré d'vn pre-

mier Reſidu Medial, ou à celuy d'vn Reſidu de Rationele Moyene, par les meſmes propoſitions.

Aplication des nombres.

R18. & 4. eſtans ioins par le ſigne +, le coté de R18 +4. ſera le premier Bimedial R8 + R2.

Mais le coté de R80 + 4. eſt R(R20+4.) + R(R20−4.) *Et ainſi des Reſidus.*

67. 105.

Prop. LVIII. Teor. XLI.

Si vn rectangle eſt compoſé de deus eſpaces Moyens incomenſurables, il eſt egal, au quaré d'vne ſegonde Bimediale, ou à celuy d'vne Double-moyene. Et la diference de ces deus eſpaces, eſt egal au quaré de l'vn des Reſidus ſemblables.

Que l'eſpace BI, ſoit compoſé des deus Moyens incomenſurables BC, CD. Ie dis que BI, eſt egal au quaré d'vne ſegonde Bimediale, ou à celuy d'vne Double-moyene.

Ayant fait la meſme conſtruction qu'en la 56e. les lignes
a 19.p. FG, GK, ſeront toutes deus Rationeles, *a* incomenſurables de longueur à EF.

Et parce que FG, GK, ont meſme proportion que EG, HK, qui ſont incomenſurables par l'ipoteſe, FG, GK, ſe-
b An. 8. 1. ront *b* incomenſurables de longueur. Et partant, eſtant Rationeles, elles ſeront comenſurables de puiſſance ſeulement,
c 33. p. & FK, ſera *c* Binomiale.

Et parce que FG, & GK, ſont incomenſurables de lon-
d Segondes deff. gueur à EF; FK, *d* ſera troiſiéme ou ſiziéme Binomiale. Si FK, eſt troiſiéme Binomiale, EK, eſt à dire BI, ſera egal
e 51.p. au quaré d'vne *e* ſegonde Bimediale. Si FK, eſt ſiziéme Bi-
f 54.p. nome, il eſt egal au quaré d'vne *f* Double-moyene. Et en fin puiſque FP, ſera vne Apotome de meſme ordre que le Binome FK, c'eſt à dire troiſiéme ou ſiziéme, le rectangle

EP, c'est à dire BM, a sera egal au quaré d'vn segond Residu Medial, ou d'vn Residu de Double-moyene. a 51. & 54. p.

Aplication des nombres.

Le coté de ℞ 72 + ℞ 40. *est le segond Bimedial* ℞ 50 + ℞ 2. *Mais le coté de* ℞ 48 + ℞ 8, *est* ℞ (℞ 12 + ℞ 10) + ℞ (℞ 12 — ℞ 10) *qui est vn nombre Double-moyen.*

ANOTATION.

Il est necessaire en cette proposition que les deus espaces Moyens soient incomensurables, car autrement la ligne droite, dont le quaré est egal au composé ou à la diference des deus Moyens, ne pouroit estre aucune des deus irrationeles qui y sont mentionées, mais simplement vne Moyene, parce que si les deus Moyens estoient comensurables; le a *total & leur* b *diference seroient aussi comensurables à chacun d'eus, & partant* c *seroient aussi Moyens, & leurs cotés lignes Moyenes. Et c'est pour cette mesme raison qu'en la trente-deusiéme, & en la trente-huitiéme le composé des quarés, & les rectangles des lignes dont est question, doiuent estre incomensurables, parce que s'ils estoient comensurables, la composition de ces deus lignes ne formeroit autre chose qu'vne* d *Moyene.* a 14. p. b An. 14. p. c Cor. 20. p. d 20. p.

Or en suite de ces trois propositions, il ne sera pas hors de propos de demontrer la suiuante.

L'espace composé de deus Irrationaus peut estre Rationel. Et la diference, Rationele.

Que les deus lignes inegales BD, DC, soient Rationeles comensurables de puissance seulement: leur diference BD, sera e *irrationele.* e 33. p.

Sur BC, soit décrit le quaré FC, & soit tirée la pararele GD. Le rectangle FD, compris sous la Rationele FB,
a v. Cor. 18.p. *qui est egale à BC, & l'irrationele BD, sera donc* a *irrationel, & le rectangle GC, compris sous les deus Rationeles comensurables de puissance seulement, est aussi* b *irrationel.*
b 18.p.

Donc le quaré de BC, qui est Rationel par l'ipotese, est composé des deus irrationaus FD, GC.

De plus la ligne irrationele apelée Maieure, est composée de deus irrationeles dont les quarez sont en consequence irrationaus, & neanmoins leur composé est Rationel. Or que les noms de la Maieure soient irrationaus, il est aisé de le preuuer, encores qu'il n'en soit rien dit en la proposition. Premierement ils ne peuuent estre tous deus Rationaus, car ils seroient comensurables, & non incomensurables de puissance. Ils ne peuuent non plus estre l'vn Rationel & l'autre irrationel, car l'vn des quarez seroit aussi Rationel, &
c 15. p. *l'autre irrationel, & leur* c *composé seroit incomensurable à*
d 10. d. 5. *chacun d'eus, & partant* d *irrationel, contre l'ipotese. Donc les noms de la Maieure sont deus lignes irrationeles.*

En fin le composé des quarez d'vn Binome & d'vne Apotome de mesmes noms, est aussi Rationel, quoy que
e 31. p. *chacun de leurs quarez soit* e *irrationel. Car le quaré du Bi-*
f 4. 2. *nome est egal* f *au composé des quarez de ses noms & au double de leur rectangle. Et le quaré l'Apotome qui est la*
g Scol. 7. 2. *diference des mesmes noms, est* g *egal au composé des mesmes quarez, moins le double du mesme rectangle, & partant si l'on ioint ensemble les quarés du Binome & de l'Apotome de mesmes noms, le composé de leurs quarez ne sera autre chose que le composé des quarez des deus noms pris deus fois, puisque l'afirmation & la negation du double du rectangle*

se

se detruisent l'vne & l'autre, & que partant il n'y faut point auoir egard. Or chaque nom estant Rationel, leurs quarez sont Rationaus, & partant leur composé, comme aussi son double.

Que si on supose en la derniere figure que FD, soit Rationel, & GC, irrationel, le total FC, sera aussi a irrationel, & neanmoins la diference FD, est Rationele. a 15. p.

PROP. LIX. TEOR. XLII. 112.

L'Apotome n'est pas mesme chose que le Binome.

1. Car autrement que l'Apotome A, soit aussi Binomiale s'il est posible. Ayant apliqué à la Rationele proposée BC, le rectangle CD, egal au quaré d'A, la largeur BD, sera *b* premiere Apotome. Que sa conuenante soit DE. Et parce qu'A, est aussi supposée Binomiale; BD, sera *c* premier Binome, dont les noms soient BF, FD. b Cor. 49. p. c 49. p.

2. Or BE, BF, sont Rationeles comensurables de longueur à BC, par les definitions, & *d* partant aussi entre elles, mais FD, DE, seront Rationeles comensurables de puissance seulement à BC, aussi par les definitions. d 10. p.

3. Et parce que BE, BF, sont *e* comensurables de longueur, BE, sera aussi *f* comensurable de longueur au reste FE, & par consequent FE, sera Rationele comensurable de longueur à BC: mais DE, estant Rationele comensurable de puissance seulement à BC; FE, ne sera aussi *g* comensurable que de puissance à DE. e 2. art. f Cor. 14. p. g 74. 10. p.

4. Donc FD, est *h* irrationele, quoy qu'elle ayt esté *i* demontrée Rationele, ce qui est impossible. Et partant l'Apotome A, n'est pas Binomiale. h 33. p. i 2. art.

ANOTAT.

Cette proposition n'a aucune dificulté en nombres à cause des signes + & — qui témoignent assez que l'Apotome n'est pas mesme chose que le Binome.

COROL.

Puiſque le quare de la Moyene apliqué à la Ra-
a 19. p. tionele propoſee a pour *a* largeur vne Rationele, que le Binome a pour largeur de ſon quaré, vne
b Cor. 49. p. *b* premiere Binomiale, & les autres irrationeles com-
c Coro^l. 50 : 51 : 52 : 53 : 54. pp. poſées *c* diuerſes autres ſortes de Binomes, mais l'Apotome & les autres Reſidus diuerſes ſortes d'Apotomes, & que les Binomes ſont diferens les vns des autres, come auſſi les Apotomes : & que de plus
d 59. p. *d* l'Apotome n'eſt pas meſme choſe que le Binome: il s'enſuit que les largeurs des quarés de l'Apotome & des autres Reſidus, ſont toutes diferentes des largeurs que font les quarez des Binomes, & des autres irrationeles compoſées. Et partant,

Vne ligne droite eſtant propoſée pour Rationele, on peut ſuiuant la doctrine de ce traité, en trouuer treze toutes diferentes d'eſpece qui à ſon egard ſeront irrationeles : deſqueles il y a deus eſpeces qui ſe ſubdiuiſent chacune en ſis autres, ſauoir le Binome & l'Apotome. Les treze irrationeles ſont les ſuiuantes.

1. *La Moyene ou Mediale* R/12 : R/20.

2. *Le Binome dont il y a ſis eſpeces diferentes, ſauoir*

1. 6 + R/20
2. R/12 + 3.
3. R/20 + R/15
4. 4 + R/8.
5. R/6 + 2
6. R/5 + R/3.

3. *L'Apotome, de ſis eſpeces coreſpondantes à celles du Binome.*

4. *La premiere Bimediale* R/ 27 + R/ 3.
5. *Le premier Resídu Medial*
6. *La segonde Bimediale* R/ 40 + R/ 10.
7. *Le segond Resídu Medial*
8. *La Majeure* R/ (2 + R/ 2) + R/ (2 — R/ 2).
9. *La Mineure*
10. *La Rationele-Moyene* R/ (R/ 2 + 1) + R/ (R/ 2 — 1)
11. *Son Resídu*
12. *La Double-Moyene* R/ (R/ 3 + 1) + R/ (R/ 3 — 1)
13. *Le Resídu de Double-Moyene.*

Pour auoir des exemples en nombres, des lignes irrationeles diminuées, il ne faut qu'interposer entre les noms des composées le signe — au lieu de celuy de +.

LEMME XIV.

Si vne ligne droite est diuisée en deus parties inegales: le rectangle de la toute & de la diference, est egal à la diference des quarez des parties. Et le rectangle de la mesme ligne totale, & de la diference des segmens d'vne autre ligne diuisée en mesme proportion que la premiere; est egal à la diference des rectangles compris sous les segmens homologues de chaque ligne.

1. *Que la ligne BC, soit diuisée en deus parties inegales BD, DC; & soit prise DE, egale à DC, pour auoir la diference des parties BE. Ie dis que le rectangle compris sous la toute BC, & la diference BE, est egal à la diference des quarez de BD, DC.*

2. *Sur BC, soit décrit le quaré BF, & sur BD, le quaré BG; puis ayant prolongé DG, KG, iusques en H, & en L, du point E, soit tirée EI, paralele à CF. Le rectangle GF, sera le quaré du moindre segment DC, & le* 34.6.

rectangle BI, sera compris sous BM, egale à BC, & la diference des segmens, BE. Il faut donc prouuer que BI, est egal à diference de BG, FG.

a 43.1. 3. Premierement les complemens MG, GC, sont a egaus;
b 36.1. & parce que GE, b est egal à GC; MG, GE, seront aussi egaus. Donc les rectangles BN, MG, c'est à dire BI, GI, ensemble, sont egaus aus rectangles BN, GE, ensemble, c'est à dire à BG, quaré de BD.

c 36.1. 4. D'ailleurs DF, DI, estant c egaus aussi bien que GE, GC, les restes GI, GF, seront encores egaus, qui est à dire que GI, est quaré de DC.

5. Or BI, est diference d'entre le composé de BI, IG, le mesme IG. Donc puisque BG, est d egal à BI, IG, d 3.ax. ensemble, & IG, e à GF, le mesme rectangle BI, sera e 4.ax. aussi diference entre BG, GF, qui sont quarez de BD, DC.

6. Que la ligne droite BD, estant maintenant diuisée inegalement au point C, la ligne BF, soit diuisée en mesme proportion au point E, & que le rectangle BH, soit compris sous la premiere ligne BD, & la ligne BI, diference des parties BE, EF, de la segonde ligne BF, en prenant EI, egale à EF. Ie dis que BH, est egal à la diference des rectangles compris sous les segmens homologues BC, BE, & CD, EF.

7. Du point C, soit tirée CL, egale & paralele à BE; & soit acheué le rectangle BK. Or le rectangle BL, est compris sous les segmens homologues BC, BE; & parce que IE, c'est à dire ML, est f egale à EF: & KL, à CD; le rectan- f 34.1. gle KM, est compris sous les deus autres cotés homologues CD, EF. Et partant il faut prouuer que BH, est egal à

la diference des rectangles BL, MK.

8. *Puisque come BC, à CD, ainsi BE, à EF, ou à son egale EI, le rectangle de BC, EI, sera a egal à celuy de CD, BE. Or EL, est egale à BC, & DK, à BE; donc le rectangle d'EL, EI, est egal au rectangle de CD, DK; c'est à dire IL, à DL.* a 16. 6.

9. *Et partant si on adioute de part & d'autre le rectangle BM; le composé de BM, DL, sera egal au composé de BM, IL, c'est à dire à DL.*

10. *Et ainsi le rectangle BH, qui est diference entre le composé de BM, DL, & le rectangle MK, est aussi la diference entre BL, qui est egal au mesme composé, & MK. Ce qu'il faloit &c.*

Aplication des nombres.

Que le nombre 12. *soit diuisé en* 10. *&* 2. *la diference des parties sera* 8. *qui multipliée par le nombre total* 12. *produit* 96. *diference d'entre* 100. *&* 4. *qui sont les quarez des parties. Et si on diuise* 24. *en mesme proportion que* 12. *sauoir en* 20. *&* 4; *la diference* 16. *multipliée par* 12. *produira* 192. *diference d'entre* 200. *produit des parties homologues* 10. *&* 20; *&* 8. *produit des autres parties homologues* 2. *&* 4.

Prop. LX. Teor. XLIII. 115.

Le rectangle d'vn Binome & d'vne Apotome qui ayent mesmes noms, ou bien qui soient comensurables de longueur & proportionaus; est Rationel.

1. Que le rectangle BC, soit compris sous le Binome BE, & l'Apotome EC, qui ayent les mesmes noms BF, FE. Ie dis que BC, est Rationel.

2. Car puisque BC, est compris sous la ligne droite BE, composée de BF, FE, & la *a* diference des mesmes parties, a 36.

a Lem. 14. ſauoir EC ; le meſme rectangle BC, eſt egal à la *a* diferen-ce des quarez de BF, FE.

Or les quarez de BF, FE ſont Rationaus puiſque BF, FE, b Au. 23. p. ſont Rationeles. *b* Donc leur diference BC, eſt eſpace Ra-tionel.

3. Que le rectangle DG ſoit maintenant compris ſous le meſme Binome BE, ou ſon egal CD, & l'Apotome CG, dont les noms CI, IG, ſoient comenſurables de longueur & proportionaus aus noms BF, FE. Ie dis que DG, eſt en-cores Rationel.

4. Que la ligne IL, egale, à GI, ſoit adioutée à CI ; & la toute CL, ſera coupée en I, en meſme proportion que BE, en F, puiſque CI, ſera à IL, c'eſt à dire à IG, come BF, à BE.

5. Et partant le rectangle DG, compris ſous BE, ou ſon c Lem. 14. egale, DC, & CG, diference de CI, IG, ou IL ; eſt *c* egal à la diference des rectangles de BF, CI, & d'FE, IL.

6. Or le rectangle de BF, CI, qui ſont Rationeles co-d 18. p. menſurables de longueur par l'ipoteſe, eſt *d* Rationel ; & par la meſme raiſon celuy d'FE, IL, auſſi Rationel.

e Au. 23. f. 7. Donc leur diference DG, eſt auſſi eſpace *e* Rationel. Ce qu'il faloit &c.

Aplication des nombres.

Le produit du Binome 8+√48. *& du Reſidu de meſ-mes noms* 8—√48. *eſt* 16. *Et le produit de* √45 + √18. *& de ſon Reſidu, eſt* 27. *De meſmes le produit de* √48 + √32. *& de* √3 — √2. *dont les noms ſont comenſurables de longueur & proportionaus, eſt* 4.

Anotat.

Cette propoſition n'eſt veritable, qu'alors que les noms de l'Apotome, ſont comenſurables de longueur à ceus du Binome, & c'eſt mal à propos que ce mot (de longueur) ne ſe trouue pas en la plus part des auteurs ; car lors que les noms du Bi-

nome & de l'Apotome ne seront comensurables que de puissance, le rectangle sera tousjours irrationel. Par exemple en la derniere figure si les noms BF, FE, ne sont comensurables que de puissance aus noms CI, IL; les a *rectangles de BF, CI, & de FE, IL, seront espaces Moyens, & partant leur diference DG, ne* b *sera pas espace Rationel. Et mesmes il sera facile de prouuer qu'en ce cas le rectangle de la Binomiale & de l'Apotome, est Moyen. Car puisque en permutant come BF, à CI, ainsi FE, à IL; & come BF, à CI,* c *ainsi le quaré de BF, au rectangle de BF, CI, & come FE, à IL, ainsi le quaré d'FE, au rectangle de FE, IL; le quaré de BF, sera au rectangle de BF, CI, come le quaré d'FE, au rectangle d'FE, IL: & en permutant come le quaré de BF au quaré d'FE, ainsi le rectangle de BF, CI, au rectangle d'FE, IL. Or le quaré de BF,* d *comensurable au quaré d'FE: donc le rectangle de BF, CI, est* e *comensurable au rectangle d'FE, IL. Et partant DG, diference des deus Moyens comensurables, les rectangles de BF, CI, & d'FE, IL, sera auſsi* f *espace Moyen.*

a 18. p.
b 23. p.
c 1. com. 7.
d 33. p.
e 8. p.
f An. 23. p.

Prop. LXI. Teor. XLIV.

113
114

Le quaré d'vne ligne Rationele apliqué à vn Binome, a pour largeur vne Apotome de meſme ordre que le Binome, dont les noms ſont egaus, ou comenſurables de longueur & proportionaus, à ceus du Binome. Et eſtant apliqué à l'Apotome, il a pour largeur vn Binome de meſme ordre que l'Apotome, dont les noms ſont egaus, ou comenſurables de longueur & proportionaus à ceus de l'Apotome.

1. Que le quaré de la Rationele A, eſtant apliqué au Binome BD, face la largeur DC. Ie dis que DC, eſt Apotome de meſme ordre, & que ſes noms ſont egaus au noms de BD, ou pour le moins qu'ils leur ſont comenſurables de longueur & en meſme proportion. Soit adiouté à DC, l'Apotome CH, dont les noms ſoient egaus aus noms du Binome BD.

2. Le rectangle LH, compris ſous le Binome BD, ou ſon egale LC, & l'Apotome de meſmes noms CH, ſera *a* Rationel, & par conſequent comenſurable au Rationel BC. *a* 60. p.

3. Or come BC, à LH, ainſi DC, à CH; Donc DC, CH, ſeront *b* comenſurables de longueur, & partant DC, comenſurable de longueur à l'Apotome CH, ſera auſſi *c* Apotome & de meſme ordre. *b* An. 8. p. *c* 55. p.

4. Si donc DC, eſt egale à CH, les noms de DC, ſeront egaus aus noms de CH, c'eſt à dire de BD, puiſque ce ſont les *d* meſmes par l'ipoteſe. *d* 1. Ax.

5. Que ſi DC, n'eſt pas egale à CH; luy eſtant comenſurable de longueur, elle ſera toujours *e* Apotome de meſme ordre, & ſes noms ſeront *f* comenſurables de longueur & proportionaus aus noms de CH, c'eſt à dire de BD. *e* 55. p. *f* Cor. 55. p.

Voyez la ſegonde figure de cette propoſition.

6. Que ſi le quaré de la Rationele A, eſtant apliqué à l'Apotome BD, a pour largeur DC, on prouuera par la meſme metode, que DC, eſt Binomiale, en conſtruiſant le rectangle LH, ſous l'Apotome LC, egale à BD, & la Binomiale de meſmes noms CH; car on demontrera par vn argument ſemblable, que DC, eſt comenſurable de longueur au Binome CH, &c.

Aplication des nombres.

Le quaré du nombre Rationel 4. *eſt* 16. *lequel apliqué au Binome* 6 + R 20. *a pour largeur l'Apotome ſemblable* 6 — R 20. *Et le nombre* 8. *quaré du Rationel* R 8. *apliqué à l'Apotome* 3 — R 5. *c'eſt à dire diuiſé par* 3 — R 5. (*car la diuiſion des nombres reſpond à l'aplication des plans*) *a pour quotient* 6 + R 20.

ANOT.

ANOTATION.

Les deus dernieres propoſitions, qui en ſont trois chez Euclide, ſont tres belles & bien conſiderables, particulierement la 60e. Mais pour auoir tenu vn ordre diferent du notre, & demontré la 60e. par la 60e. au lieu de faire preceder celle-là, come nous auons fait; Euclide & tous ſes interpretes, pour le moins ceus dont i'ay peu auoir conoiſſance, ont eſté obligez de ſe ſeruir de deus demonſtrations ſi obſcures & ſi ennuyeuſes pour prouuer la derniere propoſition, principalement pour la premiere partie, que ie puis dire n'en auoir trouué aucune plus facheuſe ny plus embroüillée en tous les 10. premiers liures des Elemens. Auſſi eſt il certain que cette propoſition eſt tres dificile à demontrer ſans l'aide de la 60e. dont il faloit premierement rechercher la preuue deuant que de ſonger aus autres, puiſque c'eut eſté ſuiure l'ordre obſerué en tout ce traité, qui eſt de a parler de la nature du rectangle compris ſous deus lignes droites, deuant que de l'apliquer à l'vne de ces lignes. D'ailleurs, la demonſtration ordinaire, quoy que bone & ſufiſante, ne contente pas entierement les ſtudieus, & ne fait pas voir pourquoy vn rectangle compris ſous vne Binomiale & vne Apotome, eſt Rationel; au lieu que la preuue dont nous nous ſeruons, ſatisfait plenement vn eſprit, portant cette raiſon quant & ſoy, qui eſt que ce rectangle eſt la diference de deus eſpaces Rationaus; d'où il s'enſuit qu'il doit eſtre Rationel. 218:49: 50:pp.& ſuiu.

Au reſte Euclide ayant parlé en la derniere propoſition, de l'aplication du quaré de la Rationele à deus des irrationeles mentionees en ce liure, il ſemble eſtre neceſſaire pour la perfection de ce traité, de conſiderer auſſi l'aplication du

meſme quaré à toutes les autres irrationeles, n'eſtant pas moins beſoin de conoitre les largeurs, qui en prouienent, que celles qui ſont formées par l'Apotome, & par la Binomiale. C'eſt pourquoy nous adiouterons icy pour le contentement des curieus, les propoſitions ſuiuantes, dont ie n'ay encores veu les demonſtrations nulle part, bien que Dibuadius ſe vante auſſi de les auoir, ne les ayant pas voulu inſerer dans ſon Comentaire, pour ne point groſſir ſon liure.

PROP. I.

Le quaré d'vne Rationele apliqué à vne Moyene, a pour largeur vne Moyene, qui n'eſt comenſurable que de puiſſance à la ligne de l'aplication.

Que le quaré de la Rationele B, apliqué à la Moyene CD, face la largeur DF. Ie dis que DF, eſt Moyene, & comenſurable de puiſſance ſeulement à DC.

Ayant a *trouué la ligne Moyene FH, qui ſoit comenſurable de puiſſance ſeulement à la Moyene GF, qui auec GF, face vn rectangle Rationel, ſauoir GH; il y aura* b *meſme proportion de DF, à FH, que de DG, à GH.*

a 24. p.

b 1. 6.

Or DG, eſt commenſurable à GH, par l'ipoteſe, puiſque DG, GH, ſont tous deus Rationaus: donc DF, eſt c *comenſurable de longueur à FH. Et partant FH, eſtant* d *Moyene par la conſtruction, DF,* d *ſera auſſi Moyene.*

c Au. 8. p.

d 20. p.

Et parce que des deus lignes droites comenſurables de longueur DF, FH, la derniere FH, eſt comenſurable de puiſſance à la troiſiéme GF, ou CD; l'autre DF, e *auſſi comenſurable de puiſſance ſeulement à CD.*

e Au. 10. p.

Aplication des nombres.

Le nombre 2. diuisé par ℞ 8. a pour quotient ℞ 2.

Lemme I.

Si quatre lignes droites sont proportioneles, & que la premiere soit comensurable à la troisiéme : le rectangle des deus premieres sera comensurable au rectangle des deus dernieres.

Que les quatre lignes B, C, D, F, soient proportioneles, & que B, soit comensurable à D. Ie dis que le rectangle de BC, est comensurable au rectangle DF.

Car a *come B, à C, ainsi le quaré de B, au rectangle BC; & come D, à F, ainsi le quaré de D, au rectangle DF. Donc puisque B, est à C, come D, à F, le quaré de B sera au rectangle BC, come le quaré de D, au rectangle DF : & en permutant come le quaré de B, au quaré de D, ainsi le rectangle BC, au rectangle DF.* a Lem. 7.

Or le quaré de B, est comensurable au quaré de D, par l'ipotese. Donc le rectangle BC, est comensurable au rectangle DF. Ce qu'il &c.

Prop. II.

Le quaré d'vne Rationele apliqué à vne Bimediale, a pour largeur vn Residu Medial de mesme ordre que la Bimediale, & dont les noms sont comensurables de puissance & proportionaus, à ceus de la Bimediale.

1. *Que le quaré de la Rationele A, estant apliqué à la Bimediale BC, du premier ou segond ordre, face la largeur DC. Ie dis que cette largeur est vn Residu Medial, dont les noms sont comensurables de puissance, & proportionaus à*

ceus de BC ; & que le Residu DC, est de mesme ordre que la Bimediale BC.

2. Ayant diuisé BC, en ses noms au point F, soit
a 24. p. a trouué la Moyene CG, comensurable de puissance seulement à BF, & qui auec BF, face vn rectangle Rationel : puis ayant fait come BF, à FC, ainsi CG, à GI, soit acheué le rectangle BI.

3. Puisque BF, est comensurable de puissance seulement
b 2. Cor. 8. p. à FC ; GC, sera b comensurable de puissance seulement
c 20. p. à GI : & parce que CG, est Moyene, GI, c sera aussi Moyene. Si donc on prend GL, egale à GI, la toute CL, sera Bimediale, & on prouuera come en la 5e. prop. que BC, CL, sont comensurables, sur ce que leurs noms ont esté prouuez comensurables : & partant CL, sera de mesme ordre de Bimediales que BC, d come
d 55. p. aussi CI, Residu de la Bimediale CL, de mesme ordre de Residus.

4. De plus puisqu'en permutant come BF, à CG, ainsi FC, à GI, & que la premiere BF, est comensurable à la troisiéme FC, par l'ipotese ; les rectangles de BF, CG, &
e 1. Lem. ad. de FC, GI, sont e comensurables. Or le rectangle de BF,
f 2. art. CG, est f Rationel par la construction : donc aussi celuy de FC, GI.

g Lem. 14. 5. Et partant leur diference qui est le g rectangle BI,
h Ann. 83. p. est espace h Rationel, & par consequent comensurable à BD. Donc puisque come BD, à BI, ainsi DC, à CI : DC, sera comensurable de longueur au Residu Medial CI,
i 55. p. & partant aussi i Residu Medial de mesme ordre, &
k 2. Cor. 55. aura ses noms k comensurables & proportionaus, à ceus de CI.

Et parce que CI est de a mesme ordre que BC ; DC, sera aussi de mesme ordre que BC. a 3. art.

En fin parce que les noms de CI, sont comensurables de puissance à ceus de BC, les noms de DC, qui sont comensurables de longueur à ceus de CI, b *seront aussi comensurables de puissance à ceus de BC.* b An. 19. p.

Donc le quaré d'vne Rationele &c.

Aplication des nombres.

Que le nombre 2. soit diuisé par la premiere Bimediale R# 8 + R# 2. *Le quotient sera* R# 32 — R# 8.

Anotation.

*Il est certain en cette proposition que les noms du Résidu qui prouient de l'aplication, sont incomensurables en longueur à ceus de la Bimediale : car si les noms homologues BF, CG, estoient comensurables de longueur & FC, IG, aussi ; leurs rectangles seroient * Moyens, & partant leur* c *diference BI, ne seroit pas espace Rationel, contre l'ipotese. Mais parce qu'il n'en est pas de mesme en toutes les autres irrationeles, nous nous sommes contentez d'enoncer seulement dans la proposition que les noms du Résidu sont comensurables de puissance à ceus de la Bimediale d'aplication, afin d'auoir quelque chose, qui fut general à toutes les irrationeles.* * 21. p. c 23. p.

Lemme II.

Le quaré d'vne Majeure est au quaré d'vne Mineure, come vne quatriéme Binomiale à vne quatriéme Apotome. Et si vne Majeure fait vn quaré qui soit au quaré d'vne autre ligne, come vne quatriéme Binomiale à vne quatriéme Apotome ; cette autre ligne est Mineure.

1. *Que la ligne BC, ſoit Majeure, & DF, Mineure. Ie dis que les quarez de BC, DF, ſont entre eus, come vn quatriéme Binome à vne quatriéme Apotome.*

2. *Que les quarez de BC, DF, apliquez à la Rationele propoſee GH, facent les largeurs HK, KM, la premiere HK,* a *ſera quatriéme Binome, & BM quatriéme Apotome. Or come HK, à KM,* b *ainſi GK quaré de BC, à LM, quaré de DF.*

a 2 Cor. 52. p.

b 1. 6.

3. *Que le quaré de BC, ligne Majeure, ſoit maintenant au quaré de DF, come vn quatriéme Binome à vne quatriéme Apotome. Ie dis que la ligne DF, eſt Mineure.*

4. *Que le quaré de BC, apliqué à la Rationele propoſee HG, face la largeur HK, & celuy de DF, la largeur KM: HK,* c *ſera quatriéme Binomiale. Et parce que les quarez de BC, DF, c'eſt a dire HL, LM, ſont en proportion d'vn quatriéme Binome à vne quatriéme Apotome par l'ipoteſe, les* d *baſes HK, KM, auront auſsi la meſme proportion.*

c 2 Cor. 52. p.

d 1. 6.

5. *Or HK,* e *eſt quatriéme Binome; donc KM, eſt quatriéme Apotome, autrement elles auroient proportion d'vn quatriéme Binome à vne ligne qui ne ſoit pas quatriéme Apotome, contre ce qui a eſté prouué.*

e 4. art.

6. *Et partant le rectangle LM, eſtant compris ſous la propoſee GH, & la quatriéme Apotome KM; la ligne DF, dont le quaré eſt egal à ce rectangle,* f *ſera Mineure.*

f 52. p.

Lemme III.

Le quaré d'vne Rationele-Moyene eſt au quaré de ſon Reſidu, come vn cinquiéme Binome à vne cinquiéme Apotome. Et ſi le quaré d'vne Rationele-Moyene eſt au quaré d'vne autre ligne droite comme vne cinquiéme Binomiale à vne cinquiéme Apotome: cette autre ligne eſt

Resídu de Rationele-Moyene. Mais le quaré d'vne Double-Moyene est au quaré de son Resídu, come vn sisiéme Binome à vne sisiéme Apotome. Et si le quaré d'vne Double-Moyene est au quaré d'vne autre ligne, come vn sisiéme Binome à vne sisiéme Apotome; cette autre ligne est Resídu de Double-Moyene.

Ce Lemme se prouuera aisément par la metode du dernier, sur ce que le quaré d'vne Rationele-Moyene apliqué à la proposee a pour largeur vn cinquiéme Binome, celuy de la Double-moyene vn sisiéme Binome, & leurs Resídus, des Apotomes de mesme ordre que ces Binomes.

PROP. III.

Le quaré d'vne Rationele apliqué à vne Majeure, a pour largeur vne Mineure, dont les noms sont comensurables de puissance & proportionaus à ceus de la Majeure.

1. *Que le quaré de la Rationele A, estant apliqué à la Majeure DF, face la largeur FG. Ie dis que FG, est Mineure, & que ses noms sont proportionaus & comensurables de puissance, à ceus de la Majeure DF.*

2. *Ayant diuisé la Majeure DF, en ses noms au point E, aus deus lignes BC, DF, desquelles BC, soit la Rationele proposee, soit trouuee la troisiéme proportionele CI: à CI, BC, la troisiéme proportionele LM; & aus trois CI, BC, DF, la quatriéme proportionele HF.*

3. *Puisque DF, qui est Majeure par l'ipotese, est moyene proportionele entre BC, qui est la proposee, & CI; c'est à dire, puisque son quaré est apliqué à la Rationele proposee, la largeur CI, est quatriéme Binome.*

4. *De plus le quaré de BC, estant apliqué au quatriéme Binome CI, la largeur LM, sera quatriéme Apo-* a 61.

tome de noms proportionaus & comensurables de longueur à ceus de CI.

5. Et parce que come CI à BC, ainsi DF, à FH; en permutant come CI, à DF, ainsi BC, à FH. Or
a 2.art. come CI, à DF, ainsi DF, à BC, par la a construction: donc come DF, à BC, ainsi BC, à FH: & partant le
b 17.b. rectangle DH, compris sous DF, FH, est b egal au quaré de la proposée EC.

6. Et puisque come CI, à BC, ainsi DF, à FH,
c 22.6. leurs quarez c seront aussi proportionaus. Or come le quaré
d Cor.20 6e de CI, au quaré de BC, d ainsi CI à leur troisiéme proportionele LM. Donc come le quatriéme Binome CI, à la quatriéme Apotome LM, ainsi le quaré de la Majeure
e 2.Lem. ad. DF, au quaré d'FH, qui par consequent est e Mineure.
f 5 art. 7. D'ailleurs le rectangle DH, est f Rationel & partant comensurable au Rationel DG. Donc les lignes HF, FG, qui sont en meſme proportion que DH, DG, sont
g An. 8. p. g comensurables de longueur: & ainsi FG, comensurable à
h 55.p. la Mineure HF, est h aussi Mineure, & leurs noms ho-
i 2.Cor. 55.p. mologues i sont proportionaus & comensurables de longueur.

8. Sur EC, CI, soit descrit le rectangle BI, & sur LM, & NL, egale à BC, le rectangle NM. Or puisque les rectangles de CI, LM, & de DF, FH, sont egaus en-
k 2.art. 5.art. tre eus, (come estant l'vn & l'autre k egaus au quaré de
l 2.art. BC,) come CI, à DF, c'est à dire l come DF, à BC,
m 5.art. ainsi FH, à LM. Mais m come BF, à BC, ainsi BC, à FH. Donc come BC, à FH, ainsi FH, à LM; & partant le quaré d'FH, est egal au rectangle de BC, LM, c'est à dire à NM, qui est compris sous les meſmes lignes.

9. Et parce que BI, par la construction est egal au

quaré

quaré de DF, & que le composé des quarez des noms DE, EF, est egal au rectangle compris sous la proposee BC, & le plus grand nom de la largeur CI, qui est quatriéme Binome, come il se voit par la demonstration du 49e. Teor. si on fait le rectangle BR, egal au composé des quarez de DE, EF, le Binome CI, sera diuisé en ses noms au point R, & ayant tiré la paralele δR, le rectangle δI, sera a egal au double du rectangle DEF. Et si on prend RS, esgale à RI, & que l'on diuise RS, egalement en θ; ayant tiré les paraleles, Sμ, θρ le rectangle μθ, b sera moitié de δI, ou de μR, & partant egal au simple rectangle DEF. Et de plus CS, sera c l'Apotome du Binome CI. a 44.1. b 2.6. c 33.1.

10. Que la ligne CR, soit diuisee au point P, en sorte que le rectangle CPR, soit egal au quaré d Sθ, & soit tiree la paralele PO. Le rectangle μθ, sera d moyen proportionel entre BP, OR, come Sθ, est moyene proport. entre CP, PR. Or le rectangle DEF, est aussi e moyen proportionel entre les quarez de DE, EF, & de plus f egal à μθ; donc puisque BR, est egal au composé des mesmes quarez, les rectangles BP, OR, sont egaus aus quarez de DE, EF, le plus grand au plus grand, & le moindre au moindre. d 22.6. e Lem.9. f 9.art.

11. Puisque les noms de l'Apotome LM, sont g proportionaus aus noms du Binome CI, soit fait come CS, à SR, ainsi LM, à MT: & la conuenante ou le moindre nom d'LM, sera MT, & le plus grand LT. Et de mesme qu'au Binome CI; le rectangle NT, compris sous la Rationele proposee NL, & le plus grand nom LT, sera egal au composé des quarez des noms d'HF, dont le quaré est egal à NM; & ZT, sera egal au double du rectangle des mes- g 4.art.

noms. Si donc on diuise egalement MT, en V, & que
a 5. Lem. l'on a face MV, moyene proportionele entre LX, XT; ayant tiré les paraleles $V\sigma$, & $X\upsilon$, le rectangle ZV, sera egal au simple rectangle des noms d'HF, & partant moyen proportionel entre leurs quarez. Et parce qu'il est
b 1. 6. aussi b moyen proportionel entre NT, & υT; puisque MV, est moyene proport. entre LX, XT; & que le composé d'NX, υT, est egal au composé des quarez des noms de HF; le rectangle NX, sera egal au quaré du plus grand nom, & υT, au quaré du moindre. Et par consequent si on adioute à FH, la ligne droite $H\pi$, dont le quaré soit egal à υT, ce sera sa conuenante, & $F\pi$, son plus grand nom.

c 4. art. 12. Par cette construction les lignes CR, LT, qui c sont comensurables de longueur, sont diuisees proportionelement en tous leurs poins. Car puisque come CS, à SR, ainsi LM, à MT, & en composant & permutant come CR, à LT, ainsi SR, à MT, qui sont aussi comensurables de longueur; CS, sera aussi à $S\theta$, moitié d'SR, come LT, à MV, moitié d'MT, Et puisqu'MV, est moyene prop. entre LX, XT, come $S\theta$, l'est entre CP, PR; il y aura meſme proportion d'MV, à XT, que d'$S\theta$ à, PR. Donc puisque come CR, à $S\theta$, ainsi LT, à MV; & come $S\theta$, à PR, ainsi MV, à XT: par egalité come CR, à PR, ainsi LT, à XT; & en diuisant come CP, à PR, ainsi LX, à XT. Et partant come BP, quaré de DE, à OR, quaré d'EF, ainsi NX, quaré de πF, a υT, quaré de πH. Et puisque les quarez de DE, EF, πF, πH,
d 22. C. sont proportionaus; les d lignes DE, EF, πF, πH, sont aussi proportioneles.

e 7. art. 13. Donc les noms d'FG, qui sont e proportionaus à

πF, πH, noms d'FH, sont aussi proportionaus à DE, EF, noms de la Majeure DF, puisque ceus-cy ont esté prouués a *proportionaus aus mesmes noms d'FH.* a 12. art.

14. *En fin puisque* b *come CR. à PR, ainsi LT, à XT; en permutant come CR, à LT, qui sont comensurables de longueur, ainsi PR, à XT, qui par consequent sont aussi comensurables de longueur. On demontrera de la mesme sorte que CP, LX, sont comensurables de longueur. Et partant, les rectangles BP, OR, NX, υT qui sont en* c *mesme proportion que CP, PR, LX, XT, sont comensurables selon qu'ils se répondent, c'est à dire BP, quaré de DE, à NX, quare de πF; & OR, quaré d'EF, à υT, quaré de π H. Et ainsi les noms de DF, sont comensurables de puissance à ceus de HF.* b 12. art. c 1. 6.

15. *Donc les mesmes noms de DF, sont aussi* d *comensurables de puissance à ceus d'FG, puisque ceus d'FG, sont comensurables de longueur à ceus d'HF. Ce qu'il &c.* d 10. 7.

Aplication des nombres.

Le nombre 4. *estant diuisé par le nombre Majeur* ℞ (4 + ℞8), *a pour quotient* ℞ (8 — ℞32) *dont les noms sauoir* ℞ (4 + ℞8) & ℞) 4 — ℞8) *sont comensurables de puissance aus noms de* ℞ (4 + ℞8) *lesquels sont* ℞ (2 + ℞2) & ℞ (2 — ℞2) & *en mesme proportion.*

De sorte que ℞ (4 + ℞8) — ℞ (4 — ℞8,) *estant multiplié par* ℞ (2 + ℞2) + ℞ (2 — ℞2) *le produit qui est* ℞ (12 + ℞128) — ℞ (12 — ℞128) *est egal à* 4. *Carlà la Racine de* 12 + ℞128. *est* ℞8 + 2. & *celle de* 12 — ℞128. *est* ℞8 — 2. & *ce dernier nombre* ℞8 — 2. *estant ôté de* ℞8 + 2. *le reste est* 4.

Anotat.

On prouuera encores que les noms de la Mineure qui prouient de l'aplication, ne peuuent estre comensurables de longueur aus noms de la Majeure, non plus qu'en la derniere proposition les noms du Residu Medial, à ceus de la Bimediale. Mais il faut premierement demontrer le Lemme suiuant.

Lemme IV.

Vne grandeur composée de deus grandeurs inegales, est egale au double de la moindre partie, & à leur diference.

Que la grandeur BC, soit composee des deus grandeurs BD, DC, si on prend en BD, la grandeur DF, egale à DC, le reste BF, sera leur diference: & la toute BC, sera egale à FC, double de la partie moindre DC, & à leur diference BF.

Que le quaré de la Rationele B, apliqué à la Majeure CD, face maintenant la largeur DF, laquelle est Mineure par cette derniere proposition. Ie dis que les noms CE, ED, de la Maieure CD, sont incomensurables de longueur aus noms DG, GF de la Mineure DF. Autrement que les noms CE, ED, soient comensurables de longueur aus noms DG, GF, s'il est posible. Soit prise la ligne droite BI, diference des noms CE, ED, laquele a *sera Mineure par la definition, & soit acheué le rectangle* b *CI, lequel sera egal à la diference des quarez de CE, ED. Or le composé des mesmes quarez est Rationel, mais chaque quaré est irrationel, puisque les noms CE, ED,* c *sont lignes irrationeles, & partant aussi le double du*

a 36. p.
b Lem. 1.
c Ann. 28. p.

moindre quaré ED, eſtant a comenſurable à ſon ſimple ſera auſſi irrationel, & incomenſurable au compoſé des meſmes quarez. Donc le compoſé des quarez eſtant incomenſurable au double du moindre quaré, qui eſt b l'vne de ſes parties, ſera auſſi incomenſurable à leur diference, qui eſt ſon autre partie, ſauoir le rectangle CI, lequel par conſequent ſera irrationel. a 5. 8. b 4. 1 em. ad.

Et parce qu'il y a meſme proportion de CE, à ED, que de DG, à GF, il y aura auſſi par conuerſion meſme proportion de CE, à ID, diference de CE, ED, que de DG, à DF, diference de DG, GF; & en permutant come CE, à DG, ainſi DI, à DF. Or CE, DG, ſont comenſurables de longueur par l'ipoteſe: Donc auſſi DI, DF; & partant les rectangles CI, CF, c ſeront comenſurables, ce qui eſt impoſſible puiſque CI, a eſté prouué irrationel, & que CF, eſt Rationel par l'ipoteſe. Et partant les noms de CD, ne ſont pas comenſurables de longueur aus noms de DF. c An. 8. 8.

Prop. IIII.

Le quaré d'vne Rationele apliqué à vne Rationele-Moyene, a pour largeur vn Reſidu de Rationele-Moyene, dont les noms ſont proportionaus & comenſurables de puiſſance, à ceus de la Rationele-Moyene.

Que le quaré de la Rationele A, eſtant apliqué à la Rationele-Moyene DF, face la largeur FG. Ie dis que FG, eſt Reſidu de Rationele-Moyene, & que ſes noms ſont proportionaus & comenſurables de puiſſance à ceus de DF.

Ayant diuiſé la Rationele-Moyene DF, en ſes noms au point E: aus deus lignes BC, DF, deſqueles BG,

ſoit la Rationele propoſee, ſoit trouuée la troiſiéme proportionele CI : à CI, BC, la troiſiéme proportionele LM: & à CI, BC, DF, la quatriéme proportionele HF.

Puiſque DF, qui eſt Rationele-Moyene, eſt moyene proportionele entre la propoſée BC, & la ligne CI, qui eſt à dire que ſon quaré eſt apliqué à BC, la largeur CI, eſt cinquiéme a *Binomiale : en ſuite dequoy on prouuera come en la precedente prop. que LM, eſt cinquiéme* b *Apotome, & que FG, eſt Reſidu de Rationele-Moyene.*

a Cor. 53. f.

b Cl. p.

Et faiſant encores toute la meſme conſtruction, l'on prouuera encores que les noms d FG, ſont comenſurables de puiſſance aus noms de DF.

Aplication des nombres.

Que 4 *ſoit diuiſé par le nombre* $\sqrt{(\sqrt{32}+4)}$ *le quotient ſera* $\sqrt{(\sqrt{32}-4)}$.

Prop. IIII.

Le quaré d'vne Rationele apliqué à vne Double-Moyene, a pour largeur vn Reſidu de meſme eſpece, dont les noms ſont proportionaus & comenſurables de puiſſance, à ceus de la Double-Moyene.

Que le quaré de la Rationele A, eſtant apliqué à la Double-Moyene DF, face la largeur FG, & ſoit faite entierement la meſme conſtruction qu'aus deus dernieres propoſitions; il n'y aura autre diference ſinon que CI, c *ſera ſiſiéme Binome, & LM, ſiſiéme Apotome : en ſuite dequoy on prouuera par les meſmes argumens que la largeur FG, eſt Reſidu de Double-Moyene, & que ſes noms ſont proportionaus & comenſurables de puiſſance à ceus de la Double-Moyene BF.*

c Cor. 54. f.

Aplication des nombres.

Le nombre 16. *diuisé par* ℞ (℞12 + ℞8.) *a pour quotient* ℞ (℞192 — ℞128).

ANOTAT.

On ne peut pas demontrer en ces deus dernieres propositions, que les noms de la largeur soient incomensurables de longueur à ceus de la ligne d'aplication; & mesmes il se peut faire qu'ils leur seront comensurables & incomensurables de longueur. Mais pour le prouuer il faut premierement demontrer le Lemme suiuant.

Les noms d'vne Rationele-Moyene & d'vne Double-moyene sont lignes irrationeles.

Car si tous les deus noms de chacune de ces irrationeles ne sont pas irrationaus, ou tous deus seront Rationaus, ou l'vn sera Rationel & l'autre irrationel. Ils ne peuuent pas estre tous deus Rationaus, car ils ne seroient pas incomensurables de puissance. Si l'vn estoit Rationel, l'autre irrationel, leur rectangle ne pouroit estre ny Rationel, come en la Rationele-Moyene, ny Moyen, come en la Double-Moyene. Et partant ils sont tous deus irrationaus en l'vne & l'autre irrationele.

Or puisque ces noms sont lignes irrationeles, leurs quarez sont irrationaus. Et partant leur composé n'estant pas Rationel come en la Majeure, leur diference (qui est toujours a *egale au rectangle d'vne irrationele composée & d'vn Residu qui ont mesmes noms) poura estre & Rationele, & irrationele de mesme qu'en la 57. & en la 58. prop. où le Rationel & l'irrationel sont diferences de deus irrationaus, dont le composé n'est pas Rationel. Et parce que nous*

a Lem. 14.

auons fait voir en la derniere Anot. que tel qu'eſt le rectangle d'vne irrationele compoſée & d'vne diminuée de meſmes noms, tel eſt auſsi leur rectangle lors que leurs noms ſont proportionaus & comenſurables de longueur : il s'enſuit qu'en ces deus dernieres irrationeles mentionées aus dernieres propoſitions, le rectangle de la compoſée & du Reſidu, poura eſtre Rationel & irrationel lors que leurs noms eſtant inegaus, ils ſeront proportionaus & comenſurables de longueur ſelon qu'ils ſe répondent.

Tout ce qui a eſté demontré de l'aplication d'vn Rationel aus irrationeles compoſées ; ſe prouuera de la meſme ſorte de l'aplication d'vn Rationel aus Reſidus, leſquels auront toujours par largeurs des irrationeles compoſées, dont les noms auront les meſmes proprietez, que ceus des Reſidus en ces 4. dernieres propoſitions : & la conſtruction n'en ſera pas fort diferente, mais où il s'eſt parlé de Reſidus dans les dernieres demonſtrations, il ſe parlera en celles-cy des lignes irrationeles compoſées, & au contraire. Par exemple ſi on vouloit apliquer le quaré d'vne Rationele à vne Mineure, en ſe ſeruant de la meſme figure il faudroit prendre FG, pour la ligne d'aplication, & DF, pour la largeur, & la ligne LM, ſeroit come auparauant quatriéme Apotome, & CI, quatriéme Binome, mais LM, precederoit CI, pour la conſtruction : & la ligne HF, qui ſeroit la quatriéme proportionele à LM, BC, DF, ſeroit prouuée Majeure au lieu qu'elle eſtoit prouuée Mineure, & ſe deuroit adiouter directement à DF, au lieu de l'adiouter à FG : & pour le reſte la preuue ne ſera en rien difecente qu'en ce qu'il faudra adapter le Lemme de cette adiondion à la demonſtration par inuerſion de proportions.

Or bien

Or encores que nous ayons demonstré que toutes les irrationeles composees ayent cette proprieté, que tout espace Rationel leur estant apliqué, il se forme tousiours vne largeur qui est vne irrationele diminuée de mesme espece que la ligne de l'aplication, & dont les noms sont comensurables de puissance à ses noms, & en mesme proportion; il ne s'ensuit pas neanmoins que tout rectangle, qui sera compris sous deus irrationeles de mesme espece, l'vne composee & l'autre diminuee, dont les noms soient proportionaus & comensurables de puissance, soit tousiours Rationel, non plus qu'il ne s'ensuit pas que, pour y auoir des Moyenes comensurables de puissance seulement, dont le rectangle est Moyen, tout rectangle compris sous deus Moyenes qui ne soient comensurables de puissance seulement, soit aussi espace Moyen; a puis qu'il y a aussi de cette sorte de Moyenes dont le rectangle est Rationel. Aussi est-il certain que toutes les 5. irrationeles composees peuuent auec leurs Residus former des rectangles Rationaus & Irrationaus, pourueu que leurs noms soient proportionaus & comensurables, ou de longueur ou de puissance seulement. a 24.5.

Premierement supposant en toutes sortes d'irrationeles que les noms des deus lignes soient proportionaus.

La Binomiale, auec son Residu dont les noms seront comensurables de longueur aus siens, formera tousiours vn Rationel.

Et si les noms sont comensurables de puissance seulement, vn Moyen.

Les deus Bimediales auec leurs Residus, si leurs noms sont comensurables de longueur, tousiours vn Moyen.

Si les noms sont comensurables de puissance seulement, tantôt vn Rationel, tantôt vn Moyen.

La Majeure auec ſon Reſidu, ſi les noms ſont comenſurables de longueur, fait touiours vn irrationel.

Si les noms ſont ſeulement comenſurables de puiſſance, le rectangle ſera Rationel ou Irrationel.

La Rationele-Moyene & la Double-Moyene feront chacune auec ſon Reſidu, de quelque façon que les noms ſoient comenſurables, tantôt vn Rationel, & tantôt vn Irrationel, comme il eſt facile de l'éprouuer en nombres.

Et quoy qu'il ne ſoit pas impoſsible de definir quand le rectangle doit eſtre Rationel ou Irrationel, ny d'enſegner le moyen de trouuer toutes ſortes d'irrationeles compoſees, qui auec leurs Reſidus comprenent des Rationaus, & des Irrationaus; neanmoins come ce ſeroit vne choſe aſſez ennuyeuſe, & qui d'ailleurs ne doneroit pas beaucoup plus de conoiſſance de la nature des grandeurs incomenſurables, nous laiſſerons à la curioſité des ſtudieus la recherche de tous ces Problemes. I'adiouteray ſeulement en forme de Corolaire des cinq dernieres propoſitions, que lors que les noms des deus lignes ſont incomenſurables de puiſſance, (ce qui ne peut ariuer qu'à la ſegonde Bimediale & à la Double-Moyene) le rectangle ſera touiours Irrationel. Car s'il eſtoit Rationel, eſtant apliqué à vne Irrationele, il auroit pour largeur vne autre ligne dont les noms ſeroient comenſurables de puiſſance à ceus de la ligne d'aplication, come il a eſté prouué par les derniers Teoremes, & partant les noms des deus lignes, ne ſeroient pas incomenſurables de puiſſance, contre l'ipoteſe.

PROP. LXII. 116.

Auec vne ligne Moyene on peut former vn infinité d'irrationeles, toutes diferentes des precedentes.

Que l'espace AD, compris sous la Moyene AB, & la Rationele proposée AC, soit egal au quaré de BE. Ie dis que BE, est Irrationele diferente de toutes les autres Irrationeles mentionées en ce liure.

Premierement estant moyene proportionele entre deus lignes droites, dont l'vne est Rationele & l'autre Irrationele, son quaré est *a* irrationel, & elle irrationele. *a* 1. Cor. 18. p.

Et parce que le quaré de la Moyene apliqué à la proposée à pour largeur vne *b* Rationele, & que les quarez des douze autres irrationeles, font des largeurs *c* Binomiales ou Apotomes, mais le quaré de BE, fait vne largeur qui est Moyene; il s'ensuit que BE, est diferente de toutes les 13. susdites. *b* 19. p. *c* Corol. 49: 50: 51: 52: 53: 54. pp.

Que si on acheue le rectangle DE, & que le quaré de EF, luy soit egal, EF, sera encores diferente de toutes les treze precedentes, puisque BE, largeur de son quaré apliqué à la Rationele proposée BD, ou AC, est come nous venons de prouuer, diferente de toutes les largeurs des autres irrationeles, & est aussi bien que BE, *d* irrationele puisque son quaré est toujours compris sous la Rationele AC, & l'irrationele BE. *d* Cor. 18 p.

De la mesme façon se peuuent former autant d'autres irrationeles qu'on voudra, & demontrer qu'elles sont diferentes de toutes les autres.

Aplication des nombres.

Qu'AC, soit 3. AB, R/8 : *AD sera* R/648. *& BE, par consequent* R/// 648. *qui est diferente de la Moyene & de toutes les Binomiales & Apotomes.*

De plus le rectangle DE, sera R/// 157464. *& partant FE, coté de DE,* R/// 157464. *Et ainsi des autres.*

Anotation.

Apres cette derniere propoſition il y en a encores vne autre chez Euclide, touchant l'incomenſurabilité du côté d'vn quaré, & de ſon diametre, laquelle nous auons demontrée come vn Corolaire du 7e. Teoreme, auec lequel elle a plus de conexion qu'auec ce dernier.

Cette propoſition fait aſſez conoitre que tout ce qui a eſte dit en ce liure, des incomenſurables, n'eſt qu'vne bien petite partie de ce qui s'en peut dire, puiſqu'il y a encores vne infinité d'autres lignes Irrationeles dont il n'a point eſté parlé, telles que ſont toutes celles qui ne ſe peuuent exprimer que par ces nombres R/ 20. R/ 48. &c. Que ſi on veut conſiderer leurs rectangles, (leſquels peuuent eſtre rationaus encores que les lignes ſoient irrationeles, & meſmes incomenſurables de puiſſance, telles que ſont R/ 128. & R/ 2. dont le rectangle eſt 2.) apliquer leurs quarez à la Rationele propoſee : les adiouter enſemble ou ſouſtraire l'vne de l'autre pour en former des Binomes ou des Reſidus ; conſtruire des rectangles de la Rationele, & de chacun de ces Binomes & Reſidus ; voir quelles lignes ſont des quarez egaus à ces eſpaces ; & faire en fin toutes les ſortes de ſpeculations dont on ſe poura auiſer ſuiuant la metode de ce traité, ſans parler maintenant des Trinomes, Quadrinomes &c. qui peuuent eſtre formez tant par le moyen des lignes mentionées dans le cours de ce liure que par ces dernieres que ie viens de deſigner : on trouuera ce champ des incomenſurables, ſi grand & ſi ſpacieus, qu'au lieu d'acuſer Euclide, come font quelques

uns, de s'estre trop étendu sur cete matiere, on sera contraint d'auouër que tout ce qu'il en dit, est bien peu de chose à comparaison de ce qui reste à dire, & que ce traité est plutôt defectueus que prolixe, quoy que d'ailleurs il en contiene assez pour doner moyen de penetrer plus auant à ceus qui voudront en prendre le plaisir, ou la pene.

Quant aus solides incomensurables, nous auons deja dit, qu'Euclide n'auoit pas voulu entamer cete matiere, pour n'auoir pas ensegné l'insention de deus moyenes proportioneles en proportion continue entre deus lignes donées, laquele est necessaire pour la constitution des solides semblables. Que si on veut la supoſer en se contentant du moyen d'Apollonius, ou de quelque autre: on poura trouuer toutes sortes de solides semblables incomensurables; mais il faudra pour l'intelligence de cecy, auoir conoissance des deus premiers liures de la Stereometrie, c'est à dire de l'onziéme & du douziéme des Elemens.

Qu'il faille trouuer vn cube incomensurable au cube qui ayt pour coté la ligne B. Ayant a *trouué la ligne D, incomensurable de longueur ou de puissance à la ligne B, soient trouuées entre les lignes B, D, les deus moyenes proportioneles F, G. Ie dis que le cube de la ligne F, est incomensurable au cube de la ligne B. Car puisque les lignes B, F, G, D, sont continuelement proportioneles, le cube de B, sera au cube d'F, come la ligne B, à la ligne D. puisque les cubes qui sont solides semblables compris par des plans paraleles, sont* b *entre eus en proportiõ triplée de leurs cotés homologues. Or les lignes B, D, sont incomensurables; donc les cubes de B, F, qui sont en meſme proportion, sont auſsi* c *incomensurables.*

a 9. F.

b 33. 11.

c An. 8.

Par la meſme raison, toutes sortes de solides semblables qui auront pour cotez homologues les lignes B, F, come des

ſferes, qui ayent pour diametres, ces meſmes lignes, ou des cilindres ſemblables qui les ayent pour diametres de leurs baſes; parce que tous ces ſolides auront toujours meſme proportion entre eus que les lignes, B, D, par diuerſes propoſitions de l'11e. & du 12e. liure.

On pourra auſsi ſans l'inuention des deus moyenes, conſtruire des ſolides incomenſurables, mais non pas ſemblables. Car ſi entre les deus lignes incomenſurables de longueur B, C, on prend la moyene proportionele D, & que ſur B, D, on conſtruiſe deus poligones ſemblables, qui ſoient les baſes de deus priſmes, ou de deus piramides d'egale hauteur; il eſt certain que ces baſes, eſtant en a *meſme proportion que les lignes B, C, ſeront* b *incomenſurables. Et parce que les piramides, & les priſmes de meſme hauteur,* c *ſont en meſme proportion que les baſes, il s'enſuit que ces ſolides ſeront auſsi incomenſurables.*

a 20. 6.
b An. 8. p.
c 6. 12. & Scol. 7. 12.

Or de meſme que les lignes & les ſuperficies incomenſurables ont fait inuenter des termes numeraus pour les exprimer ainſi que nous auons montré en la 2. part. de l'Introduction, le ſemblable eſt auſsi arriué pour le ſujet des ſolides incomenſurables. Car ſi en la penultiéme figure la ligne B, eſt poſée 2. & la ligne D, ℞3. le cube de B, ſera 8. puiſque ſon coté eſt 2: & parce qu'il y a meſme proportion du cube de B, au cube d'F, que de B, à D, c'eſt à dire de 2. à ℞3. ſi on fait come 2. à ℞3. ainſi 8. à vn autre nombre, on aura pour quatriéme terme ℞48. qui eſt le nombre irrationel exprimant le cube d'F: & la ligne F, ſera par conſequent Racine cubique de ℞48. dont le caractere eſt tel, ℞qc48. qui veut dire Racine quarécubique de 48. ou bien vn nombre qui multiplié cubiquement par ſoy meſme produiſe ℞48.

Et ſi on prend les lignes B, D, en proportion ſous-double,

& entre elles les deus moyenes proportioneles en proportion continue F, G; la ligne B, eſtant poſee 1. ſon cube ſera auſsi 1. Et parce qu'il y a meſme proportion a du cube de B, au cube d'F, que de B, à D, c'eſt à dire que d'1. à 2, le cube de B, eſtant 1. celuy d'F, ſera 2. & partant F, ſera ℞c2. qui veut dire racine cubique de 2. ou vn nombre dont le cube eſt 2. a 33.11.

Que ſi entre B, F, on trouue deus moyenes proportioneles H, I, le cube de B, ſera au cube d H, come B, à F, c'eſt à dire come 1. à ℞c2: & partãt H, ſera ℞cc 2. Et ainſi des autres.

I'adiouteray pour clôture de ce traité des exemples de l'vſage des nombres irrationaus, pour faire voir qu'ils ne ſont pas ſi inutiles qu'on ſe pouroit imaginer, & qu'on ne peut eſtre dans la iuſte preciſion Geometriq; ſi l'on ne s'en ſert.

Premierement les nombres des tables des ſinus, ſont preſque tous faus à cauſe que dans leur calcul on ne rencontre pour l'ordinaire que des racines quarées de nombres qui ne ſont pas quarez, de ſorte que pour ne ſe pas ſeruir de nombres Geometriques, qui ſeroient incomodes à la verité, mais qui exprimeroient preciſement la quãtité des lignes droites, on eſt contraint d'auoir recours aus nombres les plus proches de ces racines, leſquels par conſequent ne peuuent eſtre iuſtes, & de ſupoſer le demy-diametre du cercle d'vn grand & vaſte nombre de parties, afin que ce qui manquera de chaque racine ſoit moins conſiderable. Par exemple pour le ſinus de 45. degrez, les tables metent 70711. qui n'eſt pas le veritable nombre: car au quart de cercle BC, que l'arc de 45. deg. ſoit DC, & ſon ſinus DE, ſi on tire le demy-diametre FD, ſon quaré a ſera egal aus quarez d'FE, ED. Et parce que l'angle DFE, eſt de 45. deg. ſon complement FDE, ſera auſsi de pareil nombre de degrez. Et partant les angles de la baſe FD, eſtant egaus, les cotez EF, ED, a 47.1

seront egaus, & leurs quarez aussi egaus. Et ainsi le quaré d'FD, est double du quaré de DE. Et parce que le quaré d'FD, est 10000000000. puisque FD, est ordinairement supposé 100000. le quaré de DE, sera 5000000000. lequel nombre n'estant pas quaré, n'a point d'autre racine que R5000000000. & non pas 70711. lequel nombre est trop, 70710. estant d'autre part trop peu.

2. *Trois heritiers ont à partager entre eus* 18. *arpens de terre, qui sont à chacun* 6. *arpens: mais l'vn d'eus voyant que ces arpens de terre sont en diuerses pieces separées les vnes des autres, & d'ailleurs desirant auoir vne place reguliere, dit qu'il se contente de* 5. *arpens, pourueu qu'on les luy donne en vne seule place quarée. On demande de quelle longueur ou largeur doit estre la piece de terre qu'il luy faut doner. Il est certain que tous les arpenteurs ordinaires, qui ne conoissent non plus les nombres irrationaus que les caracteres Chinois, & qui reduisent tout aus nombres vulgaires, ne sauroient dire precisément quelle doit estre cete longueur ou largeur. Et parce qu'elle ne se peut exprimer en arpens, qui est vne mesure superficiele, si on reduit ces* 5. *arpens en perches, qui est aussi vne mesure lineaire, cete piece de terre sera de* 500. *perches quarées à raison de* 100. *perches pour arpent; & partant sa longueur ou largeur sera R500. perches, & tout autre nombre ne sera pas exact pour l'exprimer, parce que* 500. *n'est pas nombre quaré.*

Quelque tems apres cete diuision faite, ce mesme heritier fait aquisition d'vne piece de terre de mesme largeur que la siene, sur la longueur de 30. *perches. Il aura donc pour longueur entiere de tout son heritage,* 30 + R500. *perches, qui est vn premier Binome sur R500. de large, & tout le contenu de sa terre sera par consequent R450000*

+ 500.

500. perches qui eſt vne ſegonde Binome.

Et ſi on vouloit reduire cete place en vn quaré parfait, ſon coté ſeroit R/ 312500 + R/ 12500. qui eſt vn nombre premier Bimedial.

3. Il y a vne piece de terre B C D, de la figure d'vn triangle equilateral dont le coté eſt 10. toiſes. On deſire ſauoir ſa ſuperficie. Parce que celle de toutes ſortes de triangles ſe trouue en multipliant la perpendiculaire tirée d'vn des angles par la moitié du coté opoſé à cet angle, come il eſt enſeigné en la Geometrie pratique: ſi de l'angle C, on tire la perpendiculaire CF, laquele diuiſera le coté BD, en deus parties egales, il faudra multiplier CF, par FD. Or pour ſauoir la quantité de CF, il faut ſouſtraire le quaré d'FD, (qui eſt 25. puiſque FD, eſt 5.) du quaré de CD, qui eſt 100. & le reſte ſera le quaré de CF, ſauoir 75. parce que le quaré de CD, eſt [b] egal aus quarez des lignes CF, FD. Et partant CF, ſera R/75. qui eſtant multipliée par 5. nombre d'FD, le produit ſera R/1875. pour le contenu du triangle BCD. [a] Scol. 26. 1. [b] 47. 1.

Ces trois exemples ſufiront pour faire voir que l'on rencontre ſouuent des nombres irrationaus dans les calculs ordinaires, & que ce ne ſont pas des choſes forgées à plaiſir. Ie ne doneray point d'exemples d'vn nombre infiny de Problemes d'Algebre, qui ne ſe peuuent reſoudre autrement que par ces nombres, pource qu'on les peut inuenter come on veut. Mais, où leur vſage eſt le plus admirable, c'eſt particulierement en l'examen des quadratures de cercle, des duplications de cube, & d'autres problemes dont on n'a pas encores trouué la ſolution Geometrique, parce que les demonſtrations en eſtant quelquefois captieuſes, la vraye pierre de touche pour en découurir la fauſſeté, ſera l'aplication des nombres irra-

tionaus, leſquels eſtans precis & exacts ne peuuent eſtre refuſez pour cet examen, au lieu que les nombres des Tables peuuent eſtre reietez eſtans preſque tous faus. Par cete voye le ſieur Camille Glorioſi refute dans ſa premiere Decade la quadrature de Baptiſte de la Porte ; & l'on a fait voir depuis quelque tems au ſieur de Laleu la fauſſeté de la ſiene. Aquoy i'adiouteray l'examen de celle que Reymarus Vrſus attribuë à Simon du Cheſne dans vn petit liure intitulé, Fundamentum Aſtronomicum, *laquele eſt telle.*

Si de l'extremité du diametre d'vn cercle, on tire vne Tangente indeterminée, & que de l'autre extremité on tire vne ligne droite qui coupe le cercle & la Tangente, en ſorte que la partie coupée de la Tangente, ſoit egale à la partie de la ſegonde ligne qui ſe trouuera inſcrite dans le cercle : cete partie inſcrite ſera egale à la quatriéme partie de la circonference du cercle. Et partant le triangle rectangle ayant pour l'vn des cotez de l'angle droit, le quadruple de cette ligne, & le demy-diametre du cercle pour l'autre ; ſera egal au meſme cercle par la 3. prop. d'Archimede de la dimenſion du cercle.

Que le cercle propoſé ſoit B C D ; & du point D, extremité du diametre B D, ſoit tirée la Tangente infinie D F, & de l'autre extremité B, la ligne B G, qui coupe le cercle & la Tangente aus poins C, G, en ſorte que la ligne B C, inſcrite au cercle, ſoit egale à G D, qui eſt la partie de la Tangente, D F, coupée par B G. Reymarus Vrſus ſoutient que cete ligne B C, eſt egale à la quatriéme partie de la circonference B C D H.

On peut par le moyen des nombres conoitre ſi cete propoſition eſt veritable, & l'examiner en cete ſorte. Puiſque B C, G D, ſont egales, leurs quarez ſeront auſſi egaus. Or

le quaré de la Tangente GD, a eſt egal au rectangle BGC; donc le quaré de BG, eſt auſsi egal au meſme rectangle. Et partant BG, eſt b coupée au point C, en la moyene & extreme proportion. Du point C, ſoit tirée CI, perpendiculaire à BD, laquele ſera par conſequent c paralele à FD: & partant BD, ſera coupée en I, en meſme proportion que BG, en C, c'eſt à dire en la moyene & extreme proportion. a 17. 3. b 30. 6. c 28. 1. 2. 6.

Poſant maintenant que le diametre BD, ſoit 7. la circonference doit eſtre ſelon les demonſtrations d'Archimede moins de 22. & la ligne BC, qui en eſt le quart, moins de $5\frac{1}{2}$. Et ſi pour euiter les fractions le diametre eſt poſé 14. BC, ſera moins de 11. puis qu'il y a meſme proportion de 14. à 11. que de 7. à $5\frac{1}{2}$.

Que le nombre 14. ſoit diuiſé en la moyene & extreme proportion (ce qui ſe fera par le moyen de l'11e. 2e. en apliquant les nombres à la figure de cete propoſition là, & ſupoſant que la ligne à diuiſer ſoit 14.) les ſegmens ſeront, le plus grand R/245—7. & le moindre 21—R/245. & partant la ligne BD, eſtant diuiſée en cete ſorte, le plus grand BI, ſera R/245—7. & le moindre ID, 21—R/245. Et parce que le quaré de CI, eſt d egal au rectangle BID, lequel eſt R/192080—392. come il ſe voit en cete multiplication d 17. 6.

R/245—7
21—R/245

—245+R/12005
—147+R/108045

R/192080—392.

la ligne CI, ſera R/(R/192080—392). De plus le quaré

c 47.1. *de BC, est egal^a aus quarez de BI, IC, & partant sera* ℞48020—98. *qui est la some de* ℞192080—392. *quaré d'IC, & de* 294—℞48020. *quaré de BI.*

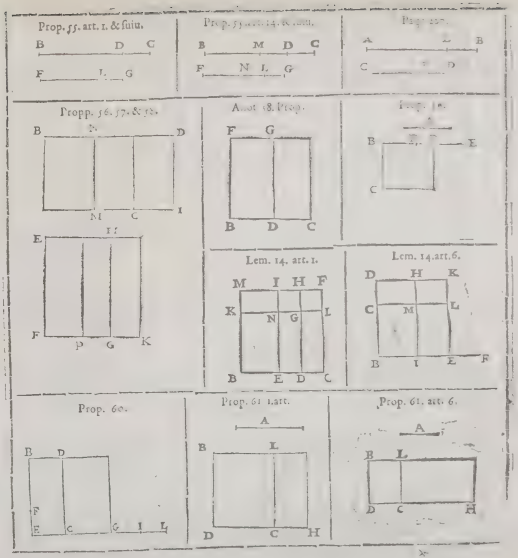
Il faut donc, si cete quadrature est veritable, que ℞48020—98. *quaré de BC, soit moindre que* 121. *quaré de* 11. *Et adjoutant de part & d'autre* 98. *(ce qui se fera en ôtant de* ℞48020—98. *la negation de* 98. *puis qu'oter vne negation c'est afirmer ce qu'elle nie; & joignant* 98. *à* 121.) *la some* ℞48020. *deura estre moindre que la some* 219. *Et parce que* ℞48020. *est plus de* 219. *come il se voit en cete extraction, apres laquelle il reste encor* 59.

```
  3959
48020(219.
 4121
  48
  38
```

Nous conclurons que cete quadrature est fausse.

Ces trois feüilles de figures se mettront apres la feuille Ll *folio* 268. *A la premiere feuille* * *a* *, *à la segonde* **, *& à la troisieme* ***.

LE Graueur m'ayant entierement manqué sur la fin de mon impression, i'ay esté contraint, pour ne la pas discontinuer durant le tems que ie ferois obligé d'employer à en trouuer vn autre ; de reietter en cet endroit les figures qui sont necessaires depuis la 55e. prop. lesquelles se trouueront toutes en ces trois feuilles auec la quote des propositions ou des pages qui leur apartienent, & pouront estre apliquées aus lieus où elles seruent, en déployant chacune de ces feuilles hors du liure.



DISCOVRS DE LA MANIERE D'EXPLIQVER LES SCIENCES EN FRANCOIS.

A MESSIEVRS DE L'ACADEMIE FRANCOISE.

MESSIEVRS,

Ie ne pense pas estre desauoüé de ceus qui cherissent les sciences, si ie dis qu'il seroit à desirer pour leur acroissement, qu'elles fussent enseignées en langue vulgaire, & que toute autre langue fut banie des Ecoles publiques : puisque chacun estant par ce moyen naturelement capable de les aprendre, il y auroit vn plus grand nombre de personnes qui s'y adoneroient, & qui les enrichiroient de leurs inuentions. Mais pour auoir creu que notre langue Françoise n'estoit pas propre pour des choses si releuées, à cause de la diſete des termes necessaires; nous auons presque tousiours negligé de les expliquer en François, & l'on n'a iamais parlé que Latin dans nos Ecoles. Il semble neanmoins qu'il n'y ait pas grande raison de luy reprocher ce defaut, puisqu'il est comun à toutes les langues dans leurs comencemens, & qu'elles ont besoin d'estre cultiuées auec beaucoup de soin & de trauail,

pour ariuer à cete abondance, qui se remarque en quelques
a ep.58. *vnes. Seneque*[a] *nous fournit vn exemple de cete verité, lors qu'il se plaint de l'indigence de la langue Latine, & nous aprend que plusieurs termes de Filosofie qui sont maintenant en vsage, n'estoient pas encores inuentez de son tems. La mesme disete se rencontre dans la plus-part des langues vulgaires d'aujourdhuy: & il est croyable que toutes les autres l'ont aussi souferte, & qu'elles n'ont pas esté esté pourueuës d'abord de tout ce qui leur estoit necessaire pour ce regard. Parce qu'encor que nous sachions naturelement expliquer nos pensées par le langage, il semble neanmoins que la nature ne nous ait voulu faire sauoir que les noms des choses, dont nous auions besoin pour les necessitez de notre vie, laissant à notre industrie l'inuention des autres mots, qui concernent seulement le contentement, ou la comodité. Ainsi voyons nous que Dieu ne voulut pas ensegner au premier home les noms des animaus, & qu'il les fit passer deuant luy pour les nomer. Le mesme se peut iuger de plusieurs autres choses natureles, telles que sont les étoiles, les meteores, & les mineraus, puis qu'il n'y a pas plus de raison qu'il luy eut apris les noms de celles cy que des viuantes. Et neanmoins on ne peut pas dire qu'il ne luy eut inspiré le nom d'aucune chose, puisqu'il luy auoit deja parlé en luy donant sa benediction, auec l'empire sur tous les animaus, & mesmes lors qu'il luy defendit l'vsage d'vn des arbres du Paradis terrestre. Et de plus, ce que l'Ecriture dit, qu'Adam noma tous les animaus de leurs noms propres, c'est à dire de ceus qui leur estoient conuenables, montre assez qu'il n'estoit pas destitué de toute sorte de langage, puisqu'autremẽt il n'eut pû leur imposer des noms qu'à sa fantaisie, n'en sachant aucun sous lequel il eut conu ce qui estoit propre & particulier à chaque espece. Il y a donc bien de l'aparence*

que sachant seulement, dez l'instant de sa creation, les noms des choses les plus ordinaires, il inuenta par leur moyen, ceus de toutes les autres qu'il se pût imaginer, se fondant sur quelque ressemblance, habitude, proprieté, ou analogie. Le mesme artifice a depuis esté pratiqué par toutes les nations pour l'inuention des mots qu'elles ne sauoient pas naturelement, come nous en pouuons remarquer des exemples en toutes les langues. Et c'est aussi de cete sorte, que les termes des sciences & des arts, ont esté inuentez par celles qui en ont eu la premiere conoissance. De là sont venus les equiuoques raisonez, qui signifient des choses extremement éloignées; les composez, qui joignant plusieurs paroles ensemble, en font vne de nouuele signification; & les deriuez, qui seruent à exprimer les choses qui dependent d'vne autre, ou qui luy apartienent en quelque façon. Mais ce moyen d'augmenter vne langue, semble n'auoir esté que fort peu suiuy des nations plus modernes, qui pour auoir receu les sciences de ces premieres, se sont pour l'ordinaire contentées, ou de former des mots sur le modele de ceus qui estoient deja en vsage parmy elles, ou de se seruir de leurs termes mesmes, en les déguisant quelque peu selon leur idiome, qui quelquefois sembloit n'estre pas bien propre pour les exprimer netement. Pour preuue de tout ce que ie viens de dire, presuposant que les Grecs ayent inuenté la Geometrie, ils ont imposé le nom de Trígonon, *à vne figure superficiele qui est enfermée de trois lignes droites, suiuant sa nature qui est d'auoir trois angles, ce qui est designé par le mesme mot: ils ont aussi apelé* Peripherı́a, *c'est à dire* Enuironement, *la ligne courbe qui borne le cercle, parce qu'elle est portée ou décrite tout autour, ce qui est aussi exprimé par le terme: Les Romains qui ont apris la Geometrie d'eus, ont formé sur*

τρίγωνον.

περιφερία.

ces deus mots, ceus de Triangulum, *& de* Circumferentia, *qui signifient exactement les meſmes choſes; ce que l'on peut apeler vne veritable traduction. Mais voyant d'autre côté que les mots de* Quílindros, *& de* Scalinòs, *ne ſe pouuoient pas bien rendre en leur langue, ou qu'eſtant ſimplement traduis, ils ſembloient n'auoir pas ſi bone grace, ils ſe ſont ſeruis de ceus de* Cylindrus, *& de* Scalénus, *qui ſont les meſmes habillez à la Latine pour le regard de l'accent & de la terminaiſon, ſans rechercher des termes equiualens, encores qu'ils euſſent pû metre en vſage* Volutatorium, *au lieu de* Cylindrus, *&* Irregularis, *au lieu de* Scalenus. *Pour la meſme raiſon, la Iuriſprudence des Grecs eſt toute remplie de termes Latins accomodez à la prononciation Greque, tels que ſont ceus de* Courátor, Poúpillos, *& autres qui ſe voyent dans les Inſtitutes de Teofile. Et, ce qu'on trouuera plus étrange, les Grecs d'aujourdhuy, ne ſe ſouuenant plus de la doctrine de leurs peres; au lieu de ſe ſeruir des termes de leur anciene langue, métent en vſage ceus des nations voiſines chez qui ils vont aprendre les ſciences, ainſi que ie l'ay experimenté en vne Aritmetique écrite en Grec vulgaire, qui eſtoit toute plene de ces mots Italiens,* Sommar, Moltiplicar, *& d'autres ſemblables.*

κύλιν-δρος. σκαλη-νός.

Cet emprunt de termes étrangers, n'a pû ſans doute, eſtre que fort deſauãtageus pour les nations qui l'ont pratiqué, puis qu'il leur a ôté le ſoin d'en inuenter: mais celles là ſe ſont encores fait plus de tort, qui mépriſant leurs langues natureles, ont voulu ſe ſeruir entierement de quelques autres pour les ſciences; car c'eſt principalement ce qui a fait continuer parmy elles, la diſete de mots qui eſt comune à toutes dans le comencement. Ainſi, parce que les Romains aloient chercher la ſcience à

Atenes, où ils ne pouuoient l'aprendre qu'en Grec, la langue Latine a long tems ressenty, & ressent encores quelque peu ce defaut. Et pource que la Filosofie & les autres sciences, n'ont gueres esté enseignées en France autrement qu'en Latin; notre langue se trouue presque aussi dénuée de termes de sciences, que si elles y estoient encores nouueles. Ie say bien qu'vn auteur moderne semble atribuer cete defectuosité, au peu de cas que nous auons tousiours fait de la science, lors qu'il dit que notre richesse en termes de procez, d'armes, d'habillemens, & de friandises, & notre indigence en termes de sciences, sont des marques que nous auons plus songé au premier qu'au dernier, & que nos pensées sont plus habituées dans ces bassesses, que dans la solidité de la science. Mais à dire le vray, la disete des termes de quelque science en vne nation chez qui elle est conuë, n'est pas vn témoignage infaillible qu'elle s'y soit moins apliquée, mais seulement qu'elle n'a pas pris le soin de les inuenter; & qu'elle s'est contentée de se seruir des termes, ou mesmes entierement de la langue d'vne autre nation pour l'aprendre, ainsi qu'il nous est ariué de faire de la langue Latine. Et certes en suite de cela, quand nous aurions eu plus de Filosofes chaque anée, que la Grece n'en porta iamais, notre langue n'en seroit pas plus propre pour la Filosofie, & ne faudroit pas esperer qu'elle le deuint non plus, si la Filosofie ne parloit que Latin parmy nous. Pour plus ample preuue de cecy, il est certain que les Romains se sont fort adonez à l'Eloquence, & qu'ils ont eu vn grand nombre d'excelens orateurs, encores que nous n'ayons les écrits que de fort peu; & neanmoins la langue Latine est fort pauure de termes de Retorique, pource qu'ils ont toujours vsé de ceus des Grecs, de qui ils l'auoient aprise. Et quoy que la plaidoirie ne soit que trop en vogue parmy nous, si est-ce,

quelque choſe qu'en puiſſe croire le meſme auteur, que nous n'auons pas grande abondance de mots de Palais, & que la plus-part de ceus dont nous nous ſeruons, ſont purement Latins, & n'ont rien de François que la terminaiſon; tels que ſont tous ceus cy, Tuteur, Pupille, emancipation, majeur, fideicomiſſe, codicille, *& vne infinité d'autres, parce que nous auons receu ce bel exercice des Romains. Il faut donc demeurer d'acord, que les veritables cauſes de ce qu'vne langue demeure dans ſa pauureté naturele, ſont, le mépris qu'on en fait pour vne autre, & l'employ des termes, étrangers.*

Ayant reconu l'origine de ce mal ſi important, dont nous meſmes auons eſté les premiers auteurs par notre negligence, il ne ſera pas ſi mal aiſé d'y remedier, & de l'empécher de paſſer plus auant. Ie ſay bien neanmoins que ce ne peut eſtre ſans quelques dificultez, & que le mépris de la langue Françoiſe eſt telement entré dans les eſprits des doctes, qu'il y aura ſans doute, beaucoup de pene à l'en tirer. Et ie m'aſſure que les vns ſeront aſſez opiniátres pour ne changer iamais d'auis, & que d'autres, quoy que perſuadez, ne ſe voudront pas pourtant ſeruir de notre langue dans les ſciences. I'auoüe que i'ay eſté autrefois emporté par le torrent de l'opinion comune, ne iugeant pas aucune des langues vulgaires capable d'autre choſe que des afaires humaines; renfermant toutes leurs plus hautes pretentions dans la guerre & le gouuernement de l'Eſtat, & croyant meſme qu'il repugnoit en quelque façon à la maieſté de la ſcience, de parler le meſme idiome, dont nous nous ſeruons dans la baſſeſſe du ménage: come ſi la langue Greque n'auoit pas eſté employée en meſme tems aus diſputes de l'Academie par les Filoſofes, & aus afaires de la maiſon par les femmes. Auſſi ay-ie bien

tôt eſté deſabuſé de cete erreur, ayant quité auec les études & le Colege, cete opinon auantageuſe que i'auois euë pour la langue Latine; i'ay reconu que la ſcience n'affectoit aucun langage, & qu'il n'eſtoit pas neceſſaire d'eſtre Grec ny Latin pour eſtre ſauant. Et certes puiſque tous les homes quels qu'ils ſoient, ſont capables d'exprimer ce qu'ils ont vne fois conceu, & que la nature fait parler les vns d'vne facon, & les autres d'vne autre, pourquoy ne le pouront ils pas faire, ie dis meſmes auec plus de facilité en celle qu'elle leur a apriſe, que par le ſecours d'vne étrangere? Qu'on ne m'alegue point qu'à faute de termes vſitez, les meilleurs eſprits ne ſe pouront iamais expliquer come il faut; c'eſt vn abus & vne fauſſe imagination: ne pouuoir enſegner quelque choſe, eſt vn témoignage tres certain d'ignorance ou d'vne confuſion d'eſprit, qui ne peut ſubſiſter auec vne parfaite intelligence. La vraye marque du ſauoir, eſt de pouuoir expliquer ce que l'on ſait: & qui n'en ſera pas capable, ne me perſuadera iamais qu'il ſoit autre qu'vn ignorant ou vn hebeté, puiſqu'il ſera touiours poſſible de faire part aux autres, du meſme raiſonement dont on ſe ſera ſeruy pour ſoy meſmes. Tous termes Grecs & Latins peuuent eſtre traduis en quelque langue que ce ſoit: & s'il faut quelquefois vſer de pluſieurs paroles au lieu d'vne ſeule, cela conclut ſeulement que la choſe eſt dificile & non pas qu'elle ſoit impoſſible. Il y a de certaines proprietez de langues, qui ſemblent empécher la traduction. La langue Grecque admet aiſément la compoſition des mots, la Latine beaucoup moins, la Françoiſe fort peu: en la langue Greque & en la Latine

les deriuez ſont aſſez frequens, en François plus rares. Mais auſſi faut il ſe ſouuenir qu'il n'eſt pas beſoin d'imiter ces compoſez, ny ces deriuez; & que nous pouuons bien ſupléer le defaut de ces termes par des equiualens. Ainſi, θεολογία. *parce que les mots Grecs de* Theologia, *&* d'Aſtronomía, *ne ſe peuuent traduire ny l'vn ny l'autre, en vne ſeule parole Françoiſe, le premier ſignifiant* Diſcours de Dieu *(nom qui ſe done à la ſcience qui en traite) l'autre,* Loy ou gouuernement des Aſtres *(ce qui s'atribuë à la ſcience du mouuement des Cieus, & des étoiles) on pouroit, ſans auoir égard à ces compoſez, au lieu des mots de* Teologie *&* d'Aſtronomie, *dont nous nous ſeruons par emprunt, apeler la premiere,* la Diuine, *& l'autre,* la Celeſte, *ſousentendant le mot de* ſcience, *ou de* doctrine *par tout. D'ailleurs il n'y a aucun inconuenient de dire en pluſieurs paroles, ce que les Grecs ou les Latins diſent en vne ſeule, puiſque cela n'ôte rien ny de la grace du langage, ny de la force des termes; ce qui eſt cauſe que le mot de* dirigibilis, *ne ſe pouuant pas bien exprimer par vn ſeul terme François; & celuy de* dirigible, *eſtant trop rude; pouroit eſtre traduit,* capable de direction. *Et le ſieur D.S.A. a doné hardiment à la Logique le nom de* Conduite du Iugement, *dans le liure qu'il en a fait imprimer. Que ſi on veut auſſi pratiquer quelquefois la traduction exacte, pourquoy n'apelerons nous pas bien la Fiſique,* la Naturele; *l'Aritmetique,* la Numerale; *& l'Analiſe ou Algebre,* la Reſolution? *Le meſme ſe pouroit faire d'vne infinité d'autres, ſi on vouloit prendre la pene de les inuenter; & ſi l'vſage les auoit receus, & tous ceus qui ſe peuuent former de la ſorte, il ſeroient ſans doute auſſi excelens que les Grecs, & tous ceus qui ont*

cours

cours dans l'Ecole, puisqu'ils signifient precisément les mesmes choses, & qu'on n'y peut rien trouuer à redire que leur nouueauté.

Mais encores que notre langue puisse estre enrichie de tous les termes de sciences, il faut neanmoins remarquer qu'il est necessaire d'vser d'vne grande prudence pour les inuenter, & d'estre fort religieus au chois qui s'en doit faire. On ne doit, ny abroger indiferemment tous les Grecs & tous les Latins, ny admetre indiferemment tous les François, quelques dous & agreables qu'ils nous semblent. Qui retrancheroit tout ce qu'il y a de Grec & de Latin dans notre langue, aboliroit aussi la langue mesme, ou pour le moins la rendroit aussi ridicule que la corneille de la fable, puisqu'elle n'est presque autre chose qu'vn ramas de mots de ces deus langues. Il faut soufrir ceus qu'vn comun consentement & notre negligence d'en rechercher d'autres, ont telement autorisez, qu'ils semblent n'estre pas moins de notre langue, que de celle dont ils sont originaires, tels que sont entre autres tous les termes de Droit que i'ay aleguez auparauant, lesquels on peut dire n'estre pas moins François que Latins, encores qu'ils soient Latins originairement : & tels sont encores les noms propres des sciences, qui pour la mesme raison se doiuent conseruer, quoy qu'ils soient presque tous Grecs. Ceus là au contraire se peuuent changer, qui n'estant pas generalement admis, se trouuent vsitez par quelques auteurs modernes, qui se sont contentez de leur doner vne terminaison Françoise dans des traitez de Filosofie & d'autres sciences, qu'ils ont publiez en François. Encores faudra t'il proceder à l'égard de ceus-cy mesmes auec chois, & ne les pas reieter tous, se ressouuenant que come il y a des etrangers qui ont l'air telement François, & sauent si bien

s'habituer à nos mœurs & à nos coutumes, qu'on les prend aiſement pour naturels ; d'autres au contraire ont le viſage ſi rude & ſi diferent des notres, & s'acomodent ſi mal à nos façons de faire, qu'ils ne peuuent iamais paſſer que pour des gens de leur pays : auſſi y a t'il de certains termes, Grecs & Latins, qui pour leur douceur, ou pour eſtre deja receus en d'autres ſignifications, s'admetent aiſément pour François, & d'autres qui pour leur rudeſſe ne ſemblent pas deuoir iamais paſſer pour bons. Ainſi voit on que ces termes de Filoſofie, enontiation, ſingularité, categorie, ampliation, ſubſiſtence, relation, *ſe ſont naturaliſez d'eus meſmes, & qu'il n'eſt pas beſoin de les changer : au lieu que ces autres*, eſtant de raiſon, equiparance, diſquiparance, où & quand *lors qu'ils ſignifient des categories; ſonent ſi mal, qu'ils nous font deſirer quelque choſe de mieus, & qu'on ne les à tolerez qu'à faute d'autres. Ce ſont ces derniers & pluſieurs autres ſemblables que les oreilles delicates reconoitront aſſez, dont il faut hardiment purger notre langue, & en inuenter de plus ſuportables & de plus François. Ce que les doctes en la ſcience & en la langue, executeront aſſez facilement, pourueu qu'ils ſe ſouuienent de deus choſes. La premiere, de bien conceuoir la definition de ce qu'ils veulent exprimer, c'eſt à dire la vraye ſignification du terme qu'il faut traduire : la ſegonde, de ne pas s'opiniâtrer à la traduction exacte de chaque mot, mais ſeulement à la recherche d'vn terme François, qui ſoit ſufiſant pour l'expreſſion de la choſe. La premiere conſideration les garentira des termes impertinens : & la 2e. les dégageant de cette tiranie que ſemblent exercer ſur nous les langues anciennes, les remetra dans la liberté de l'impoſition des noms, qu'ont eue les premiers auteurs des ſciences, & laquele ne*

leur eſtoit pas vn petit auantage. C'eſt par le moyen de ces deus maximes, que i'ay inuenté quelques termes de Geometrie, que l'on poura remarquer dans mon dizième d'Euclide; & à la place des derniers de Filoſofie que ie viens de dire, ces autres ſuiuans, eſtre imaginaire *au lieu d'*eſtant de raiſon: *pour* equiparance & diſquiparance, *parité & diſparité: au lieu d'*où & de quand, *preſence locale & preſence temporele. On ne manquera pas de dire que ces mots n'expliquent pas exactement les Latins, & qu'ainſi on ne les doit pas admetre. Encores que i'aye deja répondu à cette obiection par l'établiſſement de ma 2e. maxime, ie ne laiſſeray pas de m'étendre encores quelque peu là deſſus, pource qu'elle eſt importante, & qu'il eſt bien probable qu'elle a embaraſſé tous les traducteurs qui ont paru iuſques icy. I'auoue donc franchement que ces termes ne répondent pas bien aus Latins, & meſmes que les vns en ſont aſſez éloignez, mais auſſi i'oſe ſoutenir que rien ne nous oblige à expliquer aucune choſe à la façon Latine, & que d'ailleurs les termes Latins n'ont rien de plus expreſſif, ny de plus excelent que ceus que ie viens de dire. Et pour les examiner en particulier, qui doute que le mot d'*eſtre imaginaire, *n'exprime auſſi bien ce qui eſt purement l'objet de notre entendement, qui le forme par le moyen de ſes images ou eſpeces, que celuy d'*ens rations, *lequel ſignifie que c'eſt l'ouurage de notre raiſon? Les termes Latins d'*æquiparantia *&* diſquiparantia *ſeruent à expliquer vne des diuiſions de la relation; & l'on apele relation d'equiparance, celle dont les relatifs ont vn meſme nom, telle qu'eſt la relation qu'il y a entre deus freres, dont les relatifs ſont tous deus apelez freres, y ayant entre eus mutuele relation de fraternité: mais la relation de diſquiparance, eſt celle dont les relatifs ont diuers noms, tels*

que ſont le pere & le fils, dont l'vn eſt apelé pere, *l'autre* fils, *& la relation de la part du pere, eſt nomée paternité, & celle qui eſt de la part du fils, filiation. Ie penſe qu'à moins d'eſtre extremement paſſioné pour les termes de l'école, on m'acordera aiſément que les mots de* parité & diſparité, *ſont auſſi propres pour ſignifier ces ſortes de relations que ceus d'*equiparance & diſquiparance, *leſquels à le bien prendre, ne diſent rien moins que cela, puiſqu'*equiparance *veut dire proprement* comparaiſon *ou* egalité, *&* diſquiparance *le contraire, c'eſt à dire* diſproportion *ou* inegalité *: & les termes de* parité & diſparité *qui ſignifient* reſſemblance & diuerſité, *ſeruiront auſſi bien pour la meſme choſe, puiſqu'il n'y a pas moins de reſſemblance & de diuerſité de noms en ces relations, que d'egalité & d'inegalité. Pour les mots d'*vbi & *de* quando, *les Logiciens ſauent bien qu'ils ne ſignifient autre choſe que la preſence actuele au lieu, & au tems; & qu'ainſi on peut ſe ſeruir raiſonablement des termes de* preſence locale & preſence temporele, *au lieu des mots d'*où & *de* quand.

Ce petit eſſay de termes de ſciences (lequel peut ſeruir de modele à ceus qui voudront s'exercer à leur recherche) fait aſſez conoitre ce que peut la langue Françoiſe, & qu'elle n'eſt pas ſi digne de mépris que pluſieurs ſe ſont imaginez. A quoy i'adjouteray pour confirmation, que les arts qui ont eſté inconus aus anciens, & s'exercent maintenant parmy nous, tels que ſont l'Impreſſion, & l'Artillerie; ont trouué dans notre langue tous les termes qui leur ſont neceſſaires; leſquels on a pris le ſoin d'inuenter, pource que ces arts ne nous ſont pas venus des Grecs ny des Latins, & qu'ainſi nous ne pouuions pas auoir recours à leurs langues pour les emprunter. Et pour parler en general de toutes les langes vul-

gaires, l'exemple de la langue Latine doit il pas fermer la bouche à tous ceus qui les mépriſent à cauſe de leur diſete, puis que nonobſtant l'indigence qu'elle à ſouferte au comencement, elle a eſté telement augmentée par le ſoin de ceus qui l'ont cultiuée, que ſi on excepte quelque peu de mots Grecs que l'on a voulu conſeruer, encores que l'on eut pû en trouuer d'equiualens; elle ne ſe ſert plus que de ſes termes propres pour exprimer tout ce qu'on veut. D'où nous deuons eſperer que les dificultez qui ſe rencontreront dans la Françoiſe, ne ſeront pas inuincibles, & qu'il n'y aura rien de ſi facheus dont on ne puiſſe venir à bout. D'ailleurs les ſciences n'ont iamais parlé qu'Arabe chez les Arabes, ny autrement que Grec chez les Grecs, lors que les anciennes langues de ces deus nations, qui ſont fort diferentes de celles d'aujourdhuy, eſtoient vulgaires parmy elles. Les Arabes auoient receu les ſciences des Grecs, & les Grecs des Egiptiens; ce qui ſembloit obliger les Arabes à ſe ſeruir de mots Grecs, & les Grecs de mots Egiptiens; & neanmoins l'amour qu'ils ont eu pour leurs langues, & quelquefois auſſi la vanité de paſſer pour inuenteurs de ce qu'ils ne faiſoient que traduire (qui a eſté telle parmy les Arabes qu'ils ont oſé aſſeurer qu'Euclide eſtoit Arabe, & ſe ſont faits croire long tems pour auteurs de l'Algebre) les ont fait reüſſir de telle ſorte en la traduction, que les vns & les autres ont trouué chez eus les termes neceſſaires pour les ſciences, ſans emprunter que fort peu ou rien du tout des étrangers. Ie ſay bien qu'on pouroit dire que la langue Arabique eſtant manifeſtement deriuée de l'Hebraique, & ſi le P. KirKer ne s'eſt trompé en ſes conjectures, la Grecque de l'Egiptiene: il y a bien de l'aparence que les Arabes ayent pris les termes des ſciences des Hebreus, & les Grecs des Egiptiens. Mais il

ne pareſt point que les Arabes ayent apris aucune ſcience des Hebreus, au lieu que leurs traductions d'Ariſtote, & de diuers autres auteurs temoignent aſſez qu'ils les tenoient des Grecs : & pour les coniectures du P. KirKer elles ſont aſſez foibles, à cauſe du peu de conoiſſance que nous auons de la langue des Egiptiens, qui par vn deſir extraordinaire de cacher leur doctrine, & d'empécher qu'elle deuint comune, ſe ſeruoient ordinairement de Ieroglifes ou figures miſtiques, leſqueles ne pouuoient alors eſtre entenduës que des doctes ; & qui ne ſauroient aujourd'huy faire conoitre aus plus ſubtils autre choſe que leur ſens, & non pas leurs paroles. Outre que quand meſme la langue Arabique ſeroit vne meſme choſe que l'Hebraique, & que la Greque ne ſeroit pas diſtinguée de l'Egiptiene, on pouroit dire de ces deus dernieres, ou ſi l'on veut de quelques autres encores plus ancienes (telle que pouroit eſtre la Siriaque à légard de l'Hebraique, ſelon l'opinion de ceus qui luy donent le premier rang d'antiquité) ce que nous auons dit de l'Arabique & de la Greque ; qu'elles ont eſté vulgaires en leurs tems, & qu'elles n'ont rien emprunté d'aucune autre, encores qu'elles ne fuſſent pas d'abord dans la perfection qu'elles ont aquiſe depuis. Quelques vns ſans paſſer plus auant que le Grec, & l'Arabe, diront peut eſtre que ces deus langues ſe ſont trouuées plus propres pour les ſciences que la plus part des autres ; & qu'eſtant riches & abondantes come elles ſont, il ne leur a pas eſté beſoin de rien emprunter, qui eſt vn auantage qu'elles ont par deſſus les modernes. Mais pource que i'ay deja montré par raiſon que toutes les langues eſtoient propres pour expliquer nos penſées ; voyons maintenant par l'experience, quel eſt ce grand auantage, que peuuent auoir celles-cy par deſſus les autres, pour en faire tant d'état.

Premierement pour les composez & les deriuez des Grecs, en quoy il est certain qu'ils nous surpassent, i'ay déja fait voir qu'il n'estoit pas absolument necessaire de les imiter si exactement, & que nous pouuions nous en passer. Et quant au reste, nous ne trouuerons bien souuent, au lieu de cette richesse qu'on leur attribue, autre chose qu'vne grande disete de paroles; puisqu'elles ont l'vne & l'autre plusieurs equiuoques, ou mots qui s'vsurpent en diuerses significations; ce qui est vn témoignage de pauureté, & non pas d'abondance. Ainsi le mot Grec logos, *signifie vulgairement* parole, discours, rumeur, opinion, raison: *en Teologie, & dans l'Ecriture,* le verbe Eternel: *en Matematique,* proportion. *De mesme celuy de* Parabole *se prend ordinairement pour* comparaison: *dans l'Euangile pour vne narration alegorique: en Matematique c'est vne certaine ligne courbe. Et chez les Arabes vn mesme mot signifie* le parler, l'eloquence, la Dialectique, la Retorique. *Ces equiuoques & vn grand nombre d'autres que ie pourois aleguer, montrent bien que l'abondance de ces deus langues n'est pas touiours si grande qu'on pouroit croire, puisqu'elles sont contraintes de se seruir d'vn mesme mot à diuers vsages: & que la Françoise & les autres vulgaires n'ont pas grande raison de leur porter enuie pour ce regard, n'y en ayant aucune qui ne soit bien tôt pourueue de toutes sortes de termes, si l'on y veut faire de pareils equiuoques, en étendant la signification des mots qui sont déia en vsage, à diuerses choses qu'on ne s'estoit pas auisé de leur faire signifier.*

Puisque les sciences peuuent estre expliquées en notre langue, & qu'elle peut estre enrichie des termes necessaires; n'y a t'il pas dequoy s'étoner de notre negligence, & de voir qu'il

y en ayt ſi peu de liures François parmy nous, & encores dont les termes ſoient ſi peu François que ceus dont leurs auteurs ſe ſeruent? Pour la Filoſofie, ils ne nous ont pour la plus part doné que des abregez, & ne traitent les matieres que ſuperficielement, de ſorte que ſi on en excepte quelqvn d'eus, on ne peut aprendre que fort peu de choſe dans leurs écrits, qui d'ailleurs ſont remplis de termes extremement rudes. De Teologie, nous n'en auons que fort peu ou rien du tout. Et pour les Matematiques, il eſt vray que nous en auons aſſez de Traitez; mais il ſeroit à deſirer que ceus qui les ont compoſez fuſſent encores à recomencer tant ils y ont mal reuſſi, non ſeulement pour les termes des ſciences qu'ils ont expliquées, mais, ce qui eſt plus honteus, pour le langage ordinaire. Les écrits de l'vn ſeront remplis preſque en chaque page de quelqvn de ces mots, exactitude, finablement, peculier, iaçoit, les côtez de quelconque triangle, *&c. Vn autre dira, qu'*vn triangle conſiſte de trois côtez, *qu'*on trouuera lequel qu'on voudra de trois nombres proportionels: *& en ſon diſcours vſera de ce raiſonement*, or parce qu'vne telle choſe eſt, c'eſt pourquoy il faut, &c. *Voila le beau ſtile de nos Matematiciens François pour ne rien dire des étrangers qui ont eu la hardieſſe d'écrire en notre langue, leſquels, encores qu'il ſoit impoſſible de s'empécher de rire en liſant leurs liures, ſont neanmoins en quelque façon excuſables, puiſqu'elle ne leur eſt pas naturele; mais auſſi ſe deuoient ils ſouuenir, que ce n'eſtoit pas à eus à écrire en vne langue qu'ils ne peuuent iamais bien ſauoir, quelque imagination qu'ils puiſſent auoir au contraire. On dira que les vns & les autres ont eu plus d'égard aus choſes qu'aus paroles, & qu'il n'eſt pas neceſſaire de s'atacher à ces dernieres dans les matieres de ſcience. Mais encores qu'il*

ne

ne ſoit pas beſoin d'eſtre fort eloquent en enſeignant quelque doctrine, il faut neanmoins auoüer qu'on ne doit pas eſtre barbare. Il eſt certain que le ſtile de la ſcience eſt bien different de celuy du bareau & de la chaire. Autant que les ornemens de Retorique ont bone grace en cetuy cy, autant ſeroient ils ridicules en celuy là. La ſcience eſt ſemblable au ſomet d'vn haut edifice, où les ſtatues que l'on expoſe doiuent auoir les trais rudes & groſſiers, pourueu toutefois que les iuſtes proportions y ſoient gardées. Come le raiſonement s'y exerce preſque touſiours, on ne peut euiter vne frequente repetition des termes qui y ſeruent, tels que ſont ceus cy, partant, or, mais, parce que, donc, *& autres ſemblables, qui y eſtant neceſſaires, ne doiuent pas y eſtre tenus pour deſagreables ny pour ennuyeus. Le diſcours en doit eſtre ſimple, concis, & expreſſif, ſans vne trop curieuſe recherche de la douceur des mots, ny de la cadence des periodes: & neanmoins il ne s'y faut pas ſeruir de mauuais termes, ny de façons de parler trop baſſes & populaires, ou qui ne ſoient pas en vſage. Ce genre d'écrire conſiſte en vn certain milieu entre l'eloquent & le groſſier, que peu de perſones ſauent conoitre; & c'eſt à quoy la plus grande partie de nos écriuains n'a pas pris garde, ſe contentant d'exprimer leurs penſées ſans aucun chois de paroles, come ſi la ſcience eſtoit incompatible auec la bonté du langage. Que ſi quelques vns ont eu vn ſtile raiſonable, ils n'ont pas ſongé à l'inuention des termes des ſciences, & s'imaginant que notre langue n'en eſtoit pas capable, ſe ſont tenus aus Grecs & aus Latins, qui cauſent bien ſouuent vne grande rudeſſe dans le diſcours: de ſorte qu'il ſeroit neceſſaire que des perſones doctes, & qui euſſent l'oreille plus delicate, vouluſſent trauailler de nouueau ſur toutes les ſciences en François, &*

s'eforcer de nous doner quelque choſe de mieus.

Il ſemble, Meßieurs, que cete entrepriſe vous regarde, & que la gloire n'en ſoit deuë qu'à vne Academie Françoiſe, c'eſt à dire, à vne compagnie qui s'employe auec tant de ſoin à l'enrichiſſement & à la perfection de notre langue. Elle reçoit tous les iours des leçons d'Eloquence de vous, elle deſire que vous luy apreniez auſsi la Filoſofie, & les autres ſciences, dont elle n'a eu iuſques icy gueres de bons maitres. C'eſt le plus digne trauail à quoy vous puiſsiez vous apliquer pour elle, puiſque ce ſont les ſciences qui ont rendu la Greque, la Latine, & l'Arabique ſi conſiderables, & que, ſi on excepte la Latine à cauſe de l'Egliſe qui s'en ſert, nous n'aurons pas grand beſoin des autres, lors que les ſciences parleront François, & que l'on aura traduit leurs liures come il faut. Ce ſera lors, que nous pourons nous vanter auec plus de raiſon que par le paſsé, d'auoir Atenes en France, & de ne ceder plus en rien aus anciens Grecs. Il y a toujours eu cete diference entre eus & nous, que l'Academie d'Atenes eſtoit ouuerte à tous ceus du pays; chacun y pouuoit eſtre admis, & entendoit naturelement ce que l'on y diſoit: au lieu qu'il nous faut employer beaucoup de tems à aquerir ſeulement le moyen d'en eſtre capables, qui eſt la langue Latine, ſi longue & ſi ennuyeuſe, que ſi on manque de l'aprendre de bone heure, on ne ſe peut preſque iamais reſoudre à la pene qu'elle done; & notre ieuneſſe dégoutée de ce trauail, lors qu'elle comence à la ſauoir raiſonablement, fait bien ſouuent la fin de ſes études, de ce qui n'en deuroit eſtre que le comencement & le moyen. Choſe à la verité digne de compaßion, puiſque c'eſt reſſembler à des voyageurs, qui laſſez de la longueur du chemin, ne daigneroient, apres auoir acheué leur voyage, entrer dans le lieu où ils auoient eu deſſein d'ariuer. Cela ne ſeroit

pas ſi les ſciences eſtoient enſegnées en François, puiſqu'il ne ſeroit pas neceſſaire de paſſer des cinq & ſis annees à aprendre du Latin, leſqueles ſeroient employées bien plus vtilement & plus agreablement à ces belles ſciences, dont vn ancien Filoſofe a montré que l'home eſtoit capable dez le premier vſage de ſa raiſon: ce qui formeroit bien mieus le iugement, que l'aquiſition d'vne langue, & rendroit vn eſprit bien plus propre pour toutes les autres conoiſſances: outre qu'on s'exenteroit par ce moyen de cete facheuſe vie de Colege, à quoy les ieunes gens ont pour l'ordinaire tant de repugnance à ſe ſoumetre.

On dira peut eſtre qu'il n'eſt pas à propos que les ſciences ſoient renduës ſi comunes, & que s'il eſtoit permis à chacun d'eſtre ſauant, beaucoup d'eſprits legers pouroient abuſer de la ſcience, & ſe porter bien ſouuent à des opinions erronées & contraires à leur religion, ainſi qu'il eſt ariué aus Arabes: dont les Princes ont eſté pour cete raiſon obligez de defendre les écoles publiques. Mais outre que ie ne voy pas qu'vn home ait le iugement meilleur ny l'eſprit plus ſolide pour ſauoir du Latin ou du Grec: il ne faut pas croire qu'encores que les ſciences fuſſent enſegnées en langue vulgaire, chacun fut pour cela capable d'en comprendre les matieres, pour le moins de ſoy meſmes, encores qu'il en entendit les paroles. D'ailleurs les ſciences eſtoient enſegnées en Grece en langue vulgaire, & neanmoins il ne ſe trouuera point qu'elles ayent cauſé aucun domage aus Grecs, ny que pour auoir pû eſtre apriſes par toutes les perſones populaires, chacun ait eſté ſauant parmy eus; mais ſeulement qu'ils ont eu plus grand nombre d'habiles gens qu'aucune autre nation, & qu'ils eſtoient les plus ſubtils & les mieus policez de leur tems. Que ſi les

Arabes s'en ſont mal trouués, & que leurs Princes ayent eſté contrains d'abolir leurs Academies, ſur ce que les doctes d'entre eus ne faiſoient pas grand état de leur creance ; cela n'eſt pas à craindre parmy des Cretiens, dont la foy, bien que repugnante au ſens comun & au raiſonement humain en beaucoup de choſes, n'a rien neanmoins que d'auguſte & de diuin, & ne peut cauſer que de l'admiration d'elle meſme; au lieu que la religion de l'Alcoran eſtant toute materiele, toute brutale, & remplie d'vne infinité de ſotiſes, ne pouuoit manquer d'eſtre mépriſée par les ſauans, qui cherchoient quelque choſe de plus ſpirituel, & de plus détaché des ſens, que ce qui leur eſtoit propoſé par leur legiſlateur.

Ainſi, Meſſieurs, ie ne voy rien qui vous doiue détourner d'vn deſſein ſi digne de votre compagnie, & ſi vtile à toute la France. Ie n'ay pas iugé que ce fut aſſez de vous y inuiter par mes raiſons, ſi ie ne táchois de vous y obliger auſſi par mon exemple, en vous donant vne piece Franҫoiſe de ma façon. I'ay choiſy pour cét efet dans la Geometrie le Traité des Incomenſurables, à cauſe des nouueles penſées que i'auois ſur cette matiere, me perſuadant d'ailleurs qu'eſtant eſtimée l'vne des plus dificiles de toutes les Matematiques, il n'y auroit rien de ſi facheus que l'on ne pût entreprendre d'expliquer en Franҫois, ſi ie pouuois reüſſir heureuſement ſur vn ſujet ſi épineus & ſi obſcur. Ie n'ay pas la vanité de croire que i'en ſois venu entierement à bout, & reconois franchement qu'il y a beaucoup à redire en cet ouurage. On poura neanmoins remarquer que i'ay euité autant qu'il a eſté poſſible les deus écueils qui ont fait faire naufrage à la plus-part de nos écriuains, qui ſont la rudeſſe des termes de ſciences, & la barbarie du langage, ayant pour le premier

inuenté quelques termes de Geometrie, i'ose dire plus dous, & plus agreables que ceus des anciens mesmes; & pour le segond, ne m'estant seruy de rien qui ne soit en vsage, & autant François que le sujet me l'a pû permetre. I'en laisse le iugement aus doctes, & quelque bon ou mauuais acueil que l'on face à mon liure, i'auray pour le moins la satisfaction d'auoir marqué le chemin à ceus qui voudront passer plus auant dans cette cariere, & doner aus François, ce qui leur est si auantageus & si necessaire.

FIN.

FAVTES, A CORIGER.

IL seroit necessaire auant que de lire ce Liure, d'en coriger pour le moins les plus grossieres fautes, telles que sont entre autres celles qui changent le sens. L'auteur ayant toujours esté obligé de voir les épreuues, ne s'en pouuant fier à personne, à cause de la dificulté des matieres; on ne s'étonera pas d'en trouuer icy vn si grand nombre, si l'on considere que les Auteurs sont ordinairement ceus qui aperçoiuent le moins les fautes d'impression de leurs ouurages, & qu'il leur est facile de passer par dessus sans y prendre garde, ne pouuant lire auec tant d'atention que les autres, ce qu'ils sauent trop, l'ayant composé. Voicy de quelle sorte se doiuent coriger les plus importantes, pour ne point parler des autres moins considerables, telles que sont des letres pour d'autres, des manques de virgules, & choses semblables, dont on deuine aisément la corection.

PAge 12. lig. 33. change, lisez *échange*. p. 27. l. 13. est mesme, lis. *est la mesme*. p. 28. l. 25. triplée du premier, li s. *triplée de la proportion du premier*. p. 31. l. 33. adioutez à la fin, *definition*. p. 32. l. 14. metez en marge cete citation; 16. 5. P. 33. l. 14. de l'vnité à D, lis. à B. p. 34. l. 1. metez en marge cete citation, 1. p. Là mesmes l. 30. EF, lisez E, F. p. 35. en marge 13. 7. lis. 23. 7. P. 45. l. 14. en marge 29. lis. 24. P. 47. en marge 30. 9. lis. 29. 9. P. 50. & suiu. au tiltre, de l'origine & nature lis. *& de la nature* p. 59. l. 20. par, lis. *pour*. p. 70. l. 31. adioutez à la fin, *la*. p. 85. l. 22. du grand, lis. *du plus grand*. p. 87. l. 21. & 23. ℞160. lis. ℞60. ~~p. 89. l. 21. & 23. ℞1000. lis. ℞2000.~~ p. 90. lig. penult. + ℞13824. lis. — ℞13824. p. 92. l. 18. & 19. $\frac{12}{20} = \frac{8}{6}$. lis. $\frac{10}{12} = \frac{6}{8}$. p. 93. l. 22. incomensurable, lis. *comensurable*. Là mesmes l. penult. ℞ 24 ℞18. lis. ℞24 + ℞18. p. 96. l. 6. ℞ + 51. lis. ℞5 + 1. Là mesme lig. 35. cete

sorte de côtez, lis. *les côtez*. p. 101. l. 1. en consequence lis. *consequemment*. Là mes. l. 5. 4e, 2e, lis. 4e. 2e. p. 102. l. 15. (2 + ℛ2) lis. ℛ(2+ℛ2). Là mes. l. 17. de, lis. *le*. P. 104. l. 24. adjoutez à la fin, *&*. p. 109. au comencement de la lig. 3. metez, *de*. p. 111. l. 18. les, lis. *le*. p. 112. en la quote de la page au lieu de 101. lis. 112. P. 116. l. 14. FD, lis. FB. p. 119. l. 25. EC, lis. CD. p. 122. l. der. D, B, lis. D, E. p. 126. en la figure, D 10. lis. D 16. P. 129. l. 10: 2. a vn, lis. 2. *a* 1. P. 132. l. 14. adiout. en marge cete citation, 47. 1. P. 142. l. 21. en marge, 10. p. lis. 8. p. P. 146. l. 20. apres paralelograme, adioutez, *rectangle* P. 149. l. 1. en marge 22. 6. lis. 5. 2. Là mesme l. 6. en marge. 14. p. lis. 15. 5. P. 156. l. 21. en marge, 9. def. lis. *Lem*. 8. P. 157. l. 15. FD, lis. CD. p. 162. l. 14. effacez *egal*, & au lieu de 6. lis. 4. Là mesme lig. 15. au lieu des nombres 4. 8. & 4. lis. 49. 28. & 49. P. 163. la 3e. citation de la marge doit répondre au comencement du 4. art. P. 165. l. 9. F C, lis. FG. Là mesme l. 10. irrationele lis. *rationele*. Là mesme l. 16. egal, lis. *espace*. p. 167. l. 8. &, lis. *en*. Là mesme l. 18. ℛ40. lis. ℛ80. P. 177. l. 31. BC, lis. BG. Là mesme, comensurables, lis. *incomensurables*. p. 178. l. 25. leur, lis. *le*. Là mesme, à la fin de la l. 33. adioutez LC. La mesme l. 34. ℛ(16+128). lis. ℛ(16+ℛ128) p. 179. l. 11. espame, lis. *espace*. p. 180. l. 5. BF, lis. BG. p. 195. en marge 30. lis. 80. Aus pages 210. & 211. corigez les nombres des pages qui sont 212. & 213. au lieu de 210. & 211. P. 213. l. 8. nôte, lis. *n'ôte*. p. 218. l. 11. CZ, lis. CY. p. 219. l. 27. NB. lis. Nß. p. 221. l. 5. des quatre, lis. *des cinq*. p. 222. l. 4. DB, lis. DC. Là mesme en marge 3. art. lis. 2. *art*. p. 224. l. 32. MD, lis. BD. p. 225. l. 3. FN, lis. FL. p. 229. l. 30. FB, lis. FP. p. 231. l. 26. BD, lis. BC. p. 235. l. 1. ℛ3. lis. ℛ3. P. 236. l. 12. adioutez à la fin, *&*. p. 237. l. 9. DL, lis. BL. p. 238. l. 14. BE, lis. FE. p. 240. l. 5. adiouté, lis. *adioutée*. p. 241. l. 5. par la 60e. lis. *par la* 61e. P. 242. l. penul. apres, puissance, adioutez *seulement*. Là mesme, DF, aussi, lis. *DF, est aussi*. p. 243. l. 2: ℛ2. lis. ℛ2. Là mes. l. 10. effacez *de*. p. 244. l. 4. trouué, lis. *trouuée*. p. 246. l. 6. BM, lis. KM. p. 247. l. 28. metez en marge cete citation, Corol. 52. prop. P. 248. l. 26. BF, lis. DF. p. 249. l. 16. en marge, 22. 6. lis. 1. 6. P. 254. l. 16. PROP. IIII. lis. PROP. V. p. 255. l. 18. metez en marge cete citation, 1. Cor. 18. p. Et en marge de la l. 19. cette autre, Corol. 19. p. P. 256. l. 13. par, lis. *pour*.